# Podudarnost trouglova (elementarni zadaci)

- zadaci posuđeni iz knjige:
Zbirka riješenih zadataka sa takmičenja
učenika osnovnih škola u BiH; Šefket Arslanagić-

1. U oštrouglom trouglu $\Delta ABC$ ugao kod vrha $C$ je $60^0$. Ako su $AA_1$ i $BB_1$ visine i $C'$ središte stranice $AB$, dokazati da je trougao $\Delta C'A_1B_1$ jednakostraničan.

2. U jednakokrakom trapezu srednja linija ima dužinu $5$ cm, a dijagonala je dva puta duža od srednje linije. Kolika je površina tog trapeza?

3. Zbir uglova na većoj osnovici trapeza je $90^0$. Dokazati da je duž čiji su krajevi središta osnovica jednaka duži čiji su krajevi središta dijagonala trapeza.

4. U jednakokrakom trouglu $\Delta ABC$ ugao $\measuredangle BAC$ naspram osnovice $BC$ iznosi $20^0$. Na krakovima $AB$ i $AC$ uzete su redom tačke $E$ i $D$ tako da je $\measuredangle ACE = 60^0$ i $\measuredangle ABD = 30^0$. Izračunati ugao $\measuredangle AED$.

5. Pravougaonik je podjeljen na $9$ manjih pravougaonika. Površine četiri od njih su $5,3,9$ i $2$ kvadratne jedinice (vidi sliku). Odrediti najmanju moguću vrijednost površine pravougaonika. Pod kojim uslovima pravougaonik ima tu minimalnu površinu?

6. Četverougao $ABCD$ je kvadrat izvan kojeg se nalaze tačke $E$ i $F$ tako da su trouglovi $\Delta ABE$ i $\Delta BCF$ jednakostranični. Neka je tačka $M$ središte duži $DE$ i $\{H\} = CE \cap DB$. Dokazati da je trougao $\Delta DEF$ jednakostranični.

7. U jednakokrakom trouglu $\Delta ABC$, $\overline{AC} = \overline{BC}$, osnovica $AB$ ima dužinu $\sqrt{3}$ i visina $CD$ ima dužinu $\sqrt{2}$. Neka su $E$ i $F$ sredine stranica $CB$ i $DB$ respektivno, a $G$ tačka presjeka pravih $AE$ i $CF$. Dokazati da se tačka $D$ nalazi na simetrali ugla $\measuredangle AGF$.

8. U jednakokrakom trouglu $\Delta ABC$ ugao koga obrazuju simetrala ugla između krakova i simetrala ugla na osnovici je tri puta veći od ugla na osnovici. Šta je veće: osnovica ili krak tog trougla?

9. Simetrale uglova $\alpha$ i $\beta$ jednakostraničnog trougla $\Delta ABC$ sijeku se u tački $S$. Na stranici $AB$ izabrana je tačka $M$ i na stranici $AC$ tačka $N$, tako da je $\overline{AM} + \overline{AN} = \overline{AB}$. Dokazati da je $\overline{SM} = \overline{SN}$ i izračunati veličinu ugla $\measuredangle MSN$.

10. Zadan je jednakokraki trougao $\Delta ABC$ sa osnovicom $BC$ tako da je uago $\measuredangle BAC > 50^0$. Na osnovici $BC$ data je tačka $M$ takva da je uago $\measuredangle BAM = 50^0$, a na kraku $AC$ tačka $N$ takva da je $\overline{AM} = \overline{AN}$. Koliki je ugao $\measuredangle CMN$?

11. Središte dužeg kraka pravouglog trapeza spojeno je dužima sa vrhovima trapeza koja pripadaju drugom kraku. Pri tome je trapez podijeljen na tri jednakokraka trougla. Odrediti veličinu oštrog ugla trapeza.

12. Izračunati $\measuredangle A$ trougla $\Delta ABC$ čija je dužina težišnice $d(A,M)=\frac{1}{2}d(B,C)$.

13. Dijagonala razbija jednakokraki trapez na dva jednakokraka trougla. Odrediti uglove tog trapeza.

14. Nad stranicama $BC$ i $CD$ paralelograma $ABCD$ konstruisani su jednakostranični trouglovi $\Delta BKC$ i $\Delta DLC$. Dokazati da je trougao $\Delta AKL$ jednakostraničan.

15. Zadan je trougao $\Delta ABC$. Dokazati da su sredine stranica i podnožje bilo koje visine u zadanom trouglu vrhovi jednakokrakog trapeza.

16. U kvadratu $ABCD$ tačke $M,N$ i $P$ su središta stranica $AB,BC$ i $CD$ redom. Dokazati da važi:
a) $DN \perp CM$;
b) $\measuredangle DNP = \measuredangle CMN$.

17. U kvadrat $ABCD$ stranice dužine $1$ upisan je trougao $\Delta PQR$ tako da $P \in AD, Q \in CD$ i $R \in BC$. Dokazati da je površina trougla $\Delta PQR \leq \frac{1}{2}$. Kada vrijedi jednakost?

18. U oštrouglom trouglu $\Delta ABC \left(\overline{AC} < \overline{BC}\right)$ visina $h_c = CC'$ i simetrala $s = CM$ ugla $\gamma$ zaklapaju ugao od $9^0$, a simetrale spoljašnjih uglova kod tjemena $A$ i $B$ sijeku se pod uglom od $61^0$. Odrediti uglove trougla $\Delta ABC$.

19. U trouglu $\Delta ABC$ su date stranice $a$ i $b$. Ako je $h_c = h_a + h_b$, izračunati stranicu $c$.

20. U trouglu $\Delta ABC$ je $\measuredangle ABC = 2\measuredangle BAC$ i težišna linija $CM$ je normalna (ortogonalna) na simetralu $BD$ ugla $\measuredangle ABC$. Odrediti uglove trougla $\Delta ABC$.

21. Neka su $a,b$ i $c$ dužine stranica trougla i $t_c$ dužina težišnice povučene iz vrha (tjemena) $C$. Dokazati da vrijedi nejednakost

22. Dat je paralelogram $ABCD$ kod koga je $\overline{AB} = 2\overline{BC}$. Središte $M$ stranice $AB$ spojeno je sa tjemenima $C$ i $D$. Izračunati koliko stepeni iznosi ugao $\measuredangle CMD$.

23. Iz tjemena $A$ pravougaonika $ABCD$ spuštena je normala na dijagonalu pravougaonika i produžena za istu dužinu do tačke $F$. Dokazati da je:
a) duž $BF$ normalna na duž $DF$;
b) četverougao $BDFC$ jednakokraki trapez.

24. Dat je jednakokrako-pravougli trougao $\Delta ABC$ s pravim uglom kod vrha $C$. Nad stranicom (katetom) $BC$ konstruisan je jednakostranični trougao $\Delta BCD$ (razlikovati dva slučaja). Izračunati veličinu ugla $\measuredangle ADB$.

25. Dat je kvadrat $ABCD$ i unutar njega je odabrana tačka $P$ tako da je trougao $\Delta BCP$ jednakostraničan. Prava $AP$ siječe stranicu $CD$ u tački $E$. Odredite mjerni broj ugla $\measuredangle CPE$. Odgovor obrazložiti!

26. Na produžetku stranice $AB$ trougla $\Delta ABC$ iza $B$ u odnosu na $A$ data je tačka $M$, tako da je $\overline{BM} = \overline{BC}$. Dokazati da je prava $MC$ paralelna simetrali ugla $\Delta ABC$.

27. U trouglu $\Delta ABC$ je $\overline{AC}=\overline{BC}$, a visina $AD$ sa simetralom $AE$ ($E\in BC$) ugla $\measuredangle DAC$ gradi ugao od $30^0$. Naći uglove trougla $\Delta ABC$ i dokazati da je $\overline{AE}=\overline{EC}$. Odgovor obrazložiti!

28. Dat je paralelogram $ABCD$ kod koga je $\overline{AB}=2\overline{BC}$. Središte $M$ stranice $AB$ spojeno je sa tjemenima $C$ i $D$. Izračunati koliko stepeni iznosi ugao $\measuredangle CMD$.

29. Trougao $\Delta ABC$ je jednakokraki kod koga je $\overline{AB}=\overline{AC}$. Neka su tačke $D\in BC$ i $E\in AC$ takve da je $\measuredangle EBC=\frac{1}{2}\measuredangle BAD$ i neka je tačka $F$ presječna tačka pravih $AD$ i $BE$, tj. $\{F\}=AD\cap BE$. Dokazati da je trougao $\Delta AFE$ jednakokraki.

30. Simetrale uglova $\measuredangle ABC$ i $\measuredangle ACB$ trougla $\Delta ABC$ se sijeku u tački $I$. Neka su tačke $M$ i $N$ simetrične tački $I$ u odnosu na stranice $BC$ i $AB$ trougla. Koliko iznosi ugao $\measuredangle ABC$ ako je $BM\perp BN$?

31. Neka je četverougao $ABCD$ paralelogram. Tačka $M$ je središte stranice $BC$, a tačka $P$ je podnožje normale spuštene iz vrha $D$ na pravu $AM$. Dokazati da je $\overline{CP}=\overline{AB}$.

32. Neka je $CD$ visina na hipotenuzu pravouglog trougla $\Delta ABC$, tačka $M$ središte duži $CD$ i tačka $N$ središte duži $BD$. Dokazati da je prava $AM$ normalna (okomita) na pravu $CN$.

33. Zadan je kvadrat $ABCD$ dužine stranice $1dm$. Naći poluprečnik kružnice koja dodiruje njegove dvije stranice i prolazi kroz njegov jedan vrh.

34. Površina trougla $\Delta ABC$ iznosi $18cm^2$. Tačka $D$ uzeta je na stranici $AC$, tako da je $\overline{DC}=2\overline{AD}$. Naći površine trouglova $\Delta ABD$ i $\Delta DBC$.

35. Težišnica i visina iz vrha $A$ u trouglu $\Delta ABC$ dijele ugao $\alpha$ na tri jednaka diela. Koliki su uglovi trougla $\Delta ABC$?

36. Dat je ugao od $54^0$. Kako ćeš samo pomoću šestara i linijara podijeliti taj ugao na tri jednaka dijela? Opiši postupak. (Prenesi ugao od $54^0$ sa date slike, ili ga nacrtaj pomoću uglomjera).

37. Dat je kvadrat $ABCD$ stranice $a$. Nad dvjema njegovim susjednim stranicama konstruišu se dva jednakostranična trougla u unutrašnjosti kvadrata. Izračunaj površinu zajedničkog dijela tih trouglova.

38. Nacrtaj trougao $\Delta ABC, (\beta>\alpha)$ i visinu $h_c$ na stranicu $c$. Tačku u kojoj visina siječe stranicu $c$ označi sa $E$. Produži stranicu $BC$ preko vrha $C$, te konstruiši simetralu vanjskog ugla uz vrh $C$. Tačku u kojoj simetrala siječe pravu $AB$ označi da $D$. Ako je $\frac{1}{2}\overline{CD}=\overline{CE}$, odrediti koliko je $\beta-\alpha$.

39. Na stranici $AB$ datog pravougaonika $ABCD$ istaknute su tačke $E$ i $F$, tako da je $\overline{AE}=\overline{BF}=2, \overline{EF}=6, \overline{FC}=2\sqrt{5}, \measuredangle BFC=27^0$. Odrediti uglove $\measuredangle ECF$ i $\measuredangle CEF$.

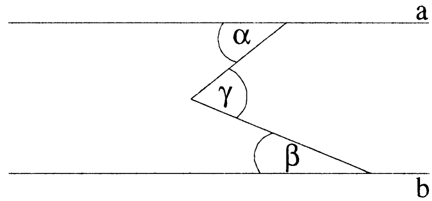
40. Dokazati da su dva trougla $\Delta ABC$ i $\Delta A'B'C'$ podudarna ako je $c=c', h_c=h_{c'}, t_c=t_{c'}$, gdje su $h_c$ i $h_{c'}$ visine, a $t_c$ i $t_{c'}$ težišnice trouglova $\Delta ABC$ i $\Delta A'B'C'$.

**41.** Zadani su ugao $\measuredangle ACB$ ($C$ je njegov vrh, a tačke $A$ i $B$ su na njegovim kracima), polupravа $CM$ unutar ugla $\measuredangle ACB$ i poluprava $CS$ koja polovi $\measuredangle ACB$. Dokazati da je $\measuredangle SCM = \frac{1}{2}(\measuredangle MCA - \measuredangle MCB)$.

**42.** Magični kvadrat reda $3 \times 3$ je takav kvadrat kod kojeg se sabiranjem po tri broja u svim pravcima (horizontalno, vertikalno i na obje dijagonale) dobija uvijek isti broj. Popuniti prazna polja u kvadratu, pa da on bude magičan kvadrat.

| | | |
|---|---|---|
| | 21 | 14 |
| | | 19 |
| 20 | | |

**43.** Dati su uglovi $\alpha = 42^0 54'$ i $\beta = 35^0 37'$. Izračunati ugao $\gamma$ ako su prave $a$ i $b$ paralelne (vidi sliku).




**44.** Postoji li trougao čije su dužine visina $h_a = 2cm, h_b = 4cm, h_c = 6cm$?

**45.** Na hipotenuzi $AB$ pravouglog trougla $\Delta ABC$ date su tačke $M$ i $N$ tako da je $\overline{AM} = \overline{AC}$ i $\overline{BN} = \overline{BC}$. Izračunati ugao $\measuredangle MCN$.

**46.** Dužine stranica trougla $\Delta ABC$ su $a = 13cm, b = 14cm, c = 15cm$. Kolike su dužine njegovih visina?

**47.** Dokazati da za pravougli trougao vrijedi nejednakost $R \geq \sqrt{P}$, gdje je $R$ poluprečnik opisanog kruga tog trougla, a $P$ njegova površina.

**48.** U trouglu $\Delta ABC$ je ugao $\beta = 75^0$ i ugao $\gamma = 80^0$. Uzete su tačke $E \in AC$ i $F \in AB$ tako da je ugao $\measuredangle FBE = 25^0$ i ugao $\measuredangle FCB = 40^0$. Izračunati ugao $\measuredangle AEF$.

**49.** Dat je trougao $\Delta ABC$. Konstruisati pravu $p$ koja je jednako udaljena od vrhova $A, B, C$ datog trougla. Dati dokaz konstrukcije. Koliko takvih pravih postoji?

**50.** Dat je trougao $\Delta ABC$ u kome je ugao $\measuredangle BAC = 120^0$. Na simetrali ugla $\measuredangle BAC$ data je tačka $D$ tako da je $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$. Dokazati da je trougao $\Delta BCD$ jednakostranični.

**51.** Kvadrat je podijeljen na devet jednakih manjih kvadrata. Je li moguće u ove male kvadrate upisati brojeve $1, 2$ i $3$ tako da u svim kolonama, vrstama i dijagonalama sume brojeva budu različite? Odgovor obrazložiti!

**52.** Dat je jednakokraki trougao $\Delta ABC$ ($\overline{AC} = \overline{BC}$). Na kraku $AC$ odabrane su dvije tačke $M$ i $N$ tako da je $\measuredangle ABM = \measuredangle CBN$ i $\overline{MN} = \overline{MB}$, pri čemu je tačka $M$ bliža tački $A$ nego tačka $N$. Koliki je ugao $\measuredangle ABN$?

**53.** Dijagonala $AC$ romba $ABCD$ ima dužinu $6cm$. Neka je $M$ središte stranice $CD$ i $N$ središte stranice $AD$. Duži $BN$ i $BM$ sijeku dijagonalu $AC$ u tačkama $P$ i $Q$.

a) Izračunati dužinu odsječka $PQ$;

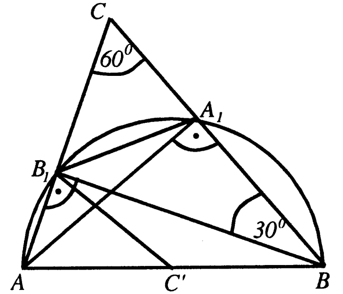
b) Izračunati površinu trougla $\Delta BMN$ ako je $\overline{BM} = 3cm$.

#

U oštrouglom trouglu $\Delta ABC$ ugao kod vrha $C$ je $60^0$. Ako su $AA_1$ i $BB_1$ visine i $C'$ središte stranice $AB$, dokazati da je trougao $\Delta C'A_1B_1$ jednakostraničan.

R:

Četverougao $ABA_1B_1$ je tetivan jer nad stranicom $AB$ leže dva prava ugla sa vrhovima u tačkama $A_1$ i $B_1$, pa je $AB$ prečnik. Tada je središte stranice $AB$ tačka $C'$ centar te kružnice, pa je $\overline{C'A_1} = \overline{C'B_1}$ i trougao $\Delta C'A_1B_1$ je jednakokraki.




Imamo da je $\measuredangle A_1BB_1 = \measuredangle CBB_1 = 30^0 = \frac{1}{2}\measuredangle A_1C'B_1$ (uglovi u pravouglom trouglu i centralni i periferijski ugao), pa je $\measuredangle A_1C'B_1 = 60^0$. Tada je trougao $\Delta C'A_1B_1$ jednakostraničan.

#

U jednakokrakom trapezu srednja linija ima dužinu $5$ cm, a dijagonala je dva puta duža od srednje linije. Kolika je površina tog trapeza?

R:

Neka je $a$ dužina veće osnovice, a $c$ dužina manje osnovice trapeza. Tada je dužina srednje linije trapeza $m = \frac{a+c}{2} = 5\,cm$ Odavde je $a + c = 10\,cm$. Neka je $CE$ visina trapeza. Označimo sa $x$ dužinu duži $EB$. Tada je $x = \frac{a-c}{2}$. Zbog toga je $\overline{AE} = a - \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2} = 5\,cm$. Tada je $h^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AE}^2 = 100 - 25 = 75.$ Dakle, $h = 5\sqrt{3}\,cm.$ Površina trapeza je $P = 25\sqrt{3}\,cm^2$.

#

Zbir uglova na većoj osnovici trapeza je $90^0$. Dokazati da je duž čiji su krajevi središta osnovica jednaka duži čiji su krajevi središta dijagonala trapeza.

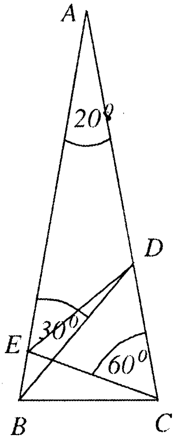
Rj.

*Prvo rješenje*: Neka je $\overline{AB} = a, \overline{CD} = c$, $P$ središte od $AC$, $Q$ središte od $BD$, $M$ središte od $AD$ i $N$ središte od $BC$. Neka je dalje, $\overline{MP} = x, \overline{QN} = y$. Tada je $x = y = \frac{c}{2}$, jer su $MP$ i $QN$ srednje linije trouglova $\Delta ACD$ i $\Delta BCD$ respektivno. Sada je $\overline{PQ} = \overline{MN} - x - y = \frac{a+c}{2} - \frac{c}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a-c}{2}$. Neka je $E$ tačka presjeka pravih $AD$ i $BC$. Tada je ugao $\measuredangle AED = 90^0$. To znači da je trougao $\Delta ABE$ pravougli trougao. Tada je težišnica koja odgovara hipotenuzi jednaka polovini hipotenuze. Neka su $S$ i $R$ središta duži $AB$ i $CD$ respektivno. Tada je $\overline{ES} = \overline{AS} = \overline{BS} = \frac{a}{2}$. Iz istih razloga je $\overline{ER} = \frac{c}{2}$. Konačno imamo $\overline{SR} = \overline{SE} - \overline{RE} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-b}{2}$. Prema tome je $\overline{PQ} = \overline{SR}$.

*Drugo rješenje*: Uz oznake iz prethodnog rješenja četverougao $PSQR$ je paralelogram u kojem je $\measuredangle QPR = \measuredangle BAD$ i $\measuredangle PQR = \measuredangle ABC$. Odavde je $\measuredangle QPR + \measuredangle PQR = 90^0$. Zato je $\measuredangle PRQ = 180^0 - 90^0 = 90^0$. To znači da je paralelogram $PSQR$ pravougaonik. Kod pravougaonika su dijagonale jednake. Zato je $\overline{SR} = \overline{PQ}$.

#

U jednakokrakom trouglu $\Delta ABC$ ugao $\measuredangle BAC$ naspram osnovice $BC$ iznosi $20^0$. Na krakovima $AB$ i $AC$ uzete su redom tačke $E$ i $D$ tako da je $\measuredangle ACE = 60^0$ i $\measuredangle ABD = 30^0$. Izračunati ugao $\measuredangle AED$.




Rj. Uglovi na osnovici su $80^0$. Tada je $\measuredangle DBC = 80^0 - 30^0 = 50^0$. Dalje iz trougla $\Delta BCD$ nalazimo $\measuredangle BDC = 180^0 - 80^0 - 50^0 = 50^0$. To znači da je trougao $\Delta BCD$ jednakokrak. Tada je $\overline{BC} = \overline{CD}$. Na isti način se pokazuje da je trougao $\Delta BCE$ jednakokrak. Tada je $\overline{BC} = \overline{CE}$. Dakle, $\overline{CE} = \overline{CD}$. To znači da je trougao $\Delta ECD$ jednakokrak, pa je $\measuredangle CED = \measuredangle ECD$. Kako je ugao između njegovih krakova $60^0$, to je taj trougao jednakostraničan, pa su mu sva tri unutrašnja ugla po $60^0$. Zbog toga je $\measuredangle AED = 180^0 - \measuredangle DEC - \measuredangle CEB = 180^0 - 60^0 - 80^0 = 40^0$.

#

Pravougaonik je podjeljen na $9$ manjih pravougaonika. Površine četiri od njih su $5,3,9$ i $2$ kvadratne jedinice (vidi sliku). Odrediti najmanju moguću vrijednost površine pravougaonika. Pod kojim uslovima pravougaonik ima tu minimalnu površinu?

| | | |
|---|---|---|
| 5 | 3 | |
| | 9 | |
| | | 2 |

R.

Neka su redom $x, y$ i $z$ širine prve, druge i treće kolone, a $u, v$ i $w$ visine prve, druge i treće vrste. Na osnovu datih podataka imamo: $xu = 5,\ yu = 3,\ yv = 9,\ zw = 2$. Odavde je:

$$x = \frac{5}{u},\ y = \frac{3}{u},\ z = \frac{2}{w}.$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 3 | | $u$ |
| | 9 | | $v$ |
| | | 2 | $w$ |
| $x$ | $y$ | $z$ | |

Površina cijelog pravougaonika je:

$$P = 19 + xv + xw + yw + zu + zv = 34 + 8\left(\frac{w}{u} + \frac{u}{w}\right) \geq 34 + 8 \cdot 2\sqrt{\frac{w}{u} \cdot \frac{u}{w}} = 50.$$

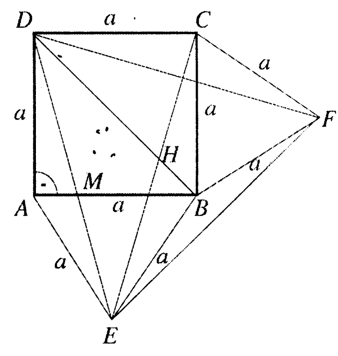
Površina pravougaonika je $50$, ako i samo ako je $u = w = \frac{v}{3}$.

#

Četverougao $ABCD$ je kvadrat izvan kojeg se nalaze tačke $E$ i $F$ tako da su trouglovi $\Delta ABE$ i $\Delta BCF$ jednakostranični. Neka je tačka $M$ središte duži $DE$ i $\{H\} = CE \cap DB$. Dokazati da je trougao $\Delta DEF$ jednakostranični.

R.

Imamo $\overline{AE} = \overline{AD} = \overline{DC} = \overline{CF} = \overline{BF} = \overline{BE} = a$. Također, imamo pošto su trouglovi $\Delta BCF$ i $\Delta ABE$ jednakostranični, onda je i: $\measuredangle EAD = \measuredangle DCF = \measuredangle EBF = 150^0$, pa su trouglovi $\Delta ADE, \Delta DCF$ i $\Delta BEF$ podudarni po stavu I (SUS), tj. $\Delta ADE \cong \Delta DCF \cong \Delta BEF$, a odavde slijedi da je $\overline{DE} = \overline{DF} = \overline{EF}$, što znači da je trougao $\Delta DEF$ jednakostranični, q.e.d.



U jednakokrakom trouglu $\Delta ABC$, $\overline{AC}=\overline{BC}$, osnovica $AB$ ima dužinu $\sqrt{3}$ i visina $CD$ ima dužinu $\sqrt{2}$. Neka su $E$ i $F$ sredine stranica $CB$ i $DB$ respektivno, a $G$ tačka presjeka pravih $AE$ i $CF$. Dokazati da se tačka $D$ nalazi na simetrali ugla $\measuredangle AGF$.

5. Da bi dokazali da se tačka $D$ nalazi na simetrali ugla $\measuredangle AGF$ dovoljno je dokazati da je ona jednako udaljena od krakova tog ugla. Neka je $x$ udaljenost tačke $D$ od kraka $GF$, a $y$ udaljenost od kraka $GA$. Visina trougla $\Delta CDF$ je $x$, pa je

$$x=\frac{2\cdot P_{\Delta CDF}}{\overline{CF}}=\frac{\overline{DF}\cdot\overline{CD}}{\overline{CF}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{2}}{\overline{CF}}=\frac{\sqrt{6}}{4\overline{CF}}.$$

Dužinu stranice $CF$ odredićemo iz pravouglog trougla $\Delta CDF$ pomoću Pitagorine teoreme. Imamo

$$\overline{CF}^2=\overline{CD}^2+\overline{DF}^2=\frac{35}{16}.$$

Tada je $x=\sqrt{\frac{6}{35}}$.

Odredimo sada $y$. U trouglu $\Delta ADE$ je $y$ visina, pa je

$$y=\frac{2\cdot P_{\Delta ADE}}{\overline{AE}}.$$

Trouglovi $\Delta ADE$ i $\Delta DBE$ imaju jednake površine, jer je $ED$ težišna linija trougla $\Delta ABE$. Zbog toga je

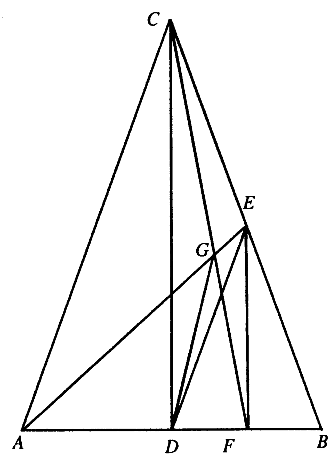
$$P_{\Delta ADE}=\frac{1}{2}P_{\Delta ABE}=\frac{1}{4}P_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{6}}{8}.$$

Primjetimo da je $EF$ srednja linija trougla $\Delta CDB$, pa je $EF\perp AB$ i $\overline{EF}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Dakle, trougao $\Delta AFE$ je pravougli, pa na osnovu Pitagorine teoreme imamo

$$\overline{AE}=\sqrt{\overline{AF}^2+\overline{FE}^2}=\frac{\sqrt{35}}{4}.$$

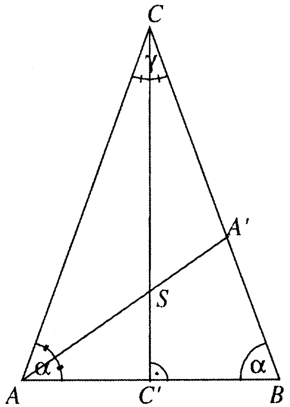
Konačno imamo

$$y=\frac{2\cdot P_{\Delta ADE}}{\overline{AE}}=\sqrt{\frac{6}{35}}=x.$$



U jednakokrakom trouglu $\Delta ABC$ ugao koga obrazuju simetrala ugla između krakova i simetrala ugla na osnovici je tri puta veći od ugla na osnovici. Šta je veće: osnovica ili krak tog trougla?

Rj. Neka je $S$ presječna tačka ovih simetrala, a $C'$ presječna tačka simetrale iz vrha $C$ i osnovice $AB$ trougla $\Delta ABC$ ($CC'$ je ujedno i visina trougla, pa je $\Delta AC'C$ pravougli).




a) Razmotrimo slučaj $\measuredangle ASC = 3\alpha$

Iz trougla $\Delta ASC$ imamo

$$\frac{\alpha}{2}+3\alpha+\frac{\gamma}{2}=180^0, \qquad (1)$$

a iz trougla $\Delta AC'C$

$$\alpha+\frac{\gamma}{2}=90^0. \qquad (2)$$

Tako vrijedi

$$180^0 \overset{(1)}{=} \frac{\alpha}{2}+3\alpha+\frac{\gamma}{2}=\frac{\alpha}{2}+2\alpha+\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right) \overset{(2)}{=} \frac{\alpha}{2}+2\alpha+90^0$$

$$\Rightarrow \frac{5\alpha}{2}=90^0 \Rightarrow \alpha=36^0.$$

Iz (2) se dobije: $\frac{\gamma}{2}=90-\alpha=90^0-36^0=54^0 \Rightarrow \gamma=108^0$. Dakle, $\gamma>\alpha$, pa je $\overline{AB}>\overline{BC}$ (tj. osnovica je veća od kraka), jer naspram većeg ugla u trouglu leži veća stranica.

b) Razmotrimo slučaj kada je $\measuredangle A'SC = 3\alpha$. ($A'$ je presječna tačka simetrale ugla na osnovici sa krakom $BC$). Sada je $\measuredangle ASC = 180^0-3\alpha$.

Iz trougla $\Delta ASC$ imamo:

$$\frac{\alpha}{2}+180^0-3\alpha+\frac{\gamma}{2}=180^0 \Rightarrow \gamma=5\alpha>\alpha,$$

dakle, u svakom slučaju je osnovica veća od kraka trougla.

\# Simetrale uglova $\alpha$ i $\beta$ jednakostraničnog trougla $\Delta ABC$ sijeku se u tački $S$. Na stranici $AB$ izabrana je tačka $M$ i na stranici $AC$ tačka $N$, tako da je $\overline{AM}+\overline{AN}=\overline{AB}$. Dokazati da je $\overline{SM}=\overline{SN}$ i izračunati veličinu ugla $\measuredangle MSN$.

R. Trouglovi $\Delta ASN$ i $\Delta BSM$ su podudarni (pravilo SUS), jer je

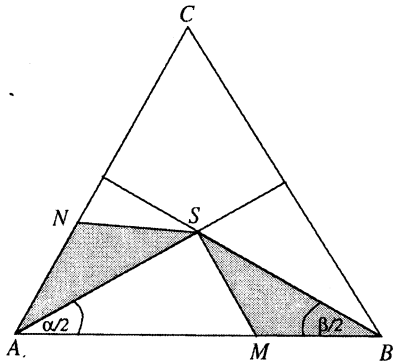
$\overline{MB}=\overline{AN}$ (prema uvjetima zadatka),

$\overline{AS}=\overline{BS}$ (jer su u jednakostraničnom trouglu simetrale uglova ujedno i težišnice),

$\measuredangle MBS=\frac{\beta}{2}=30^0=\frac{\alpha}{2}=\measuredangle NAS$.

Na osnovu toga je $\overline{SM}=\overline{SN}$. Zbog podudarnosti ovih trouglova vrijedi i $\measuredangle ASN=\measuredangle BSM$, pa je

$$\measuredangle MSN=\measuredangle MAS+\measuredangle ASN=\measuredangle MAS+\measuredangle BSM=\measuredangle ASB$$
$$=180^0-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=120^0.$$

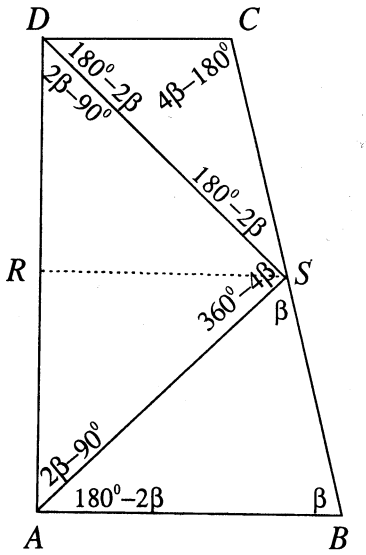



\# Zadan je jednakokraki trougao $\Delta ABC$ sa osnovicom $BC$ tako da je uago $\measuredangle BAC>50^0$. Na osnovici $BC$ data je tačka $M$ takva da je uago $\measuredangle BAM=50^0$, a na kraku $AC$ tačka $N$ takva da je $\overline{AM}=\overline{AN}$. Koliki je ugao $\measuredangle CMN$?

R. Trougao $\Delta ABC$ je jednakokraki, pa je $\alpha+2\beta=180^0$. Trougao $\Delta AMN$ je jednakokraki pa su uglovi $\measuredangle AMN$ i $\measuredangle ANM$ jednaki i označimo ih sa $\delta$. Na osnovu zbira uglova trougla $\Delta AMN$ imamo $\alpha-50^0+\delta+\delta=180^0$. Dakle, $2\delta+\alpha-50^0=\alpha+2\beta$, tj. $\delta=\beta+25^0$. Ugao $\delta=\measuredangle MNA$ je vanjski ugao trougla $\Delta AMN$, pa je $\measuredangle ANM=\measuredangle NMC+\measuredangle MCN$, tj. $\delta=\measuredangle NMC+\beta$. Dakle, $\measuredangle NMC=25^0$.

\# Središte dužeg kraka pravouglog trapeza spojeno je dužima sa vrhovima trapeza koja pripadaju drugom kraku. Pri tome je trapez podijeljen na tri jednakokraka trougla. Odrediti veličinu oštrog ugla trapeza.

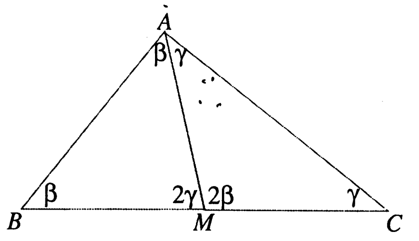
R. Neka je $SR$ srednja linija trapeza. Ona je tada istovremeno i visina i težišnica trougla $\Delta ADS$, što je moguće samo ako je $AD$ osnovica trougla $\Delta ADS$ (jednakokraki trougao!) ili kad je trougao $\Delta ADS$ jednakostranični (ova druga mogućnost otpada, jer se neposrednom provjerom dobije ili $\beta > 90^0$ ili $\measuredangle BCD = 90^0$, što je kontradikcija).




Ako pretpostavimo da je $\overline{AB} = \overline{BS}$ dolazimo do zaključka da je to moguće kada je $\beta = 90^0$, što je kontradikcija. Dakle, preostaje: $\overline{AB} = \overline{AS}, \overline{AS} = \overline{DS}$ i $\overline{CD} = \overline{CS}$ (naime, zbog činjenice da je $\measuredangle BCD$ tupi, za trougao $\Delta SDC$ je jedina mogućnost $\overline{CD} = \overline{CS}$). Uzimajući u obzir pretpostavku zadatka i činjenicu da je zbir uglova u trouglu $180^0$, te označavajući sa $\beta$ oštar ugao trapeza, imaćemo situaciju kao na slici. Kako je $\measuredangle BCD + \beta = 180^0$, imamo $4\beta - 180^0 + \beta = 180^0 \Rightarrow 5\beta = 360^0 \Rightarrow \beta = 72^0$.

\# Izračunati $\measuredangle A$ trougla $\Delta ABC$ čija je dužina težišnice $d(A,M) = \frac{1}{2} d(B,C)$.

R. Kako je $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, to su trouglovi $\Delta AMC$ i $\Delta ABM$ jednakokraki pa je $\measuredangle MAB = \measuredangle MBA = \beta$ i $\measuredangle ACM = \measuredangle MAC = \gamma$. Kako je vanjski ugao trougla jednak zbiru dva unutrašnja njemu nesusjedna ugla, to je $\measuredangle BMA = 2\gamma$ i $\measuredangle CMA = 2\beta$.

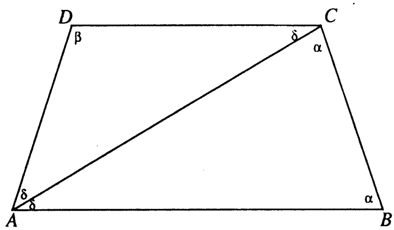



Dalje imamo $2\beta + 2\gamma = 180^0 \Rightarrow \beta + \gamma = 90^0$, tj. $\measuredangle A = 90^0$

\# Dijagonala razbija jednakokraki trapez na dva jednakokraka trougla. Odrediti uglove tog trapeza.

R. Neka je jednakokraki trapez $ABCD$ dijagonalom $AC$ razbijen na jednakokrake trouglove $\Delta BCA$ i $\Delta ACD$.
Tada je:

$$\measuredangle CAD = \measuredangle ACD (= \delta);$$
$$\measuredangle ABC = \measuredangle ABC (= \alpha).$$




Međutim, u jednakokrakom trapezu $ABCD$ je $\measuredangle ABC = \measuredangle BAD$, tj. $\alpha = 2\delta$, kao i $\measuredangle ADC = \measuredangle BCD (= \beta)$, pa je $\beta = \alpha + \delta$.

Iz trougla $\Delta ABC$ slijedi $2\alpha + \delta = 180^0$. Dakle, zbog $\alpha = 2\delta$, imamo

$$4\delta + \delta = 180^0 \Rightarrow 5\delta = 180^0 \Rightarrow \delta = 36^0,$$

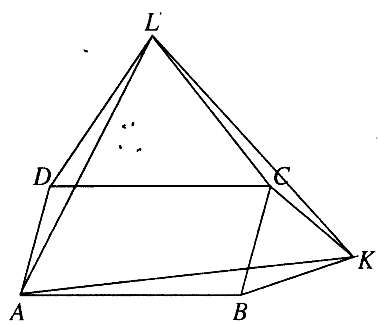
pa je

$$\alpha = 72^0 \text{ i } \beta = \alpha + \delta = 36^0 + 72^0 = 108^0.$$

\# Nad stranicama $BC$ i $CD$ paralelograma $ABCD$ konstruisani su jednakostranični trouglovi $\Delta BKC$ i $\Delta DLC$. Dokazati da je trougao $\Delta AKL$ jednakostraničan.

R. Neka je $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b$. Prema uslovu zadatka je $a = \overline{CD} = \overline{DL} = \overline{LC} = \overline{AB}$ i $b = \overline{BC} = \overline{BK} = \overline{CK} = \overline{AD}$.
Neka je, dalje, $\angle BCD = \alpha$ i $\angle ADC = \beta$. Tada je $\beta = 180^0 - \alpha$.
Imamo

$$\angle ADL = \beta + 60^0 = 240^0 - \alpha,$$
$$\angle KCL = 360^0 - \left(60^0 + \alpha + 60^0\right) = 240^0 - \alpha \text{ i}$$
$$\angle ABK = \beta + 60^0 = 240^0 - \alpha.$$



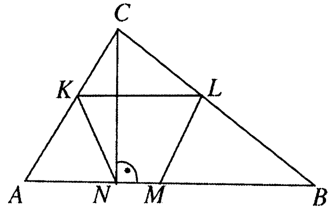

To znači da su trouglovi $\Delta ABK, \Delta CKL$ i $\Delta ALD$ podudarni. Iz podudarnosti trouglova slijedi jednakost odgovarajućih stranica, pa je $\overline{AL} = \overline{LK} = \overline{KA}$, tj. trougao $\Delta AKL$ je jednakostraničan.

#

Zadan je trougao $\Delta ABC$. Dokazati da su sredine stranica i podnožje bilo koje visine u zadanom trouglu vrhovi jednakokrakog trapeza.

R:

*Prvi način*: Neka su $K, L$ i $M$ središta stranica $AC, BC$ i $AB$ trougla $\Delta ABC$, redom, a $N$ podnožje visine iz vrha $C$.




Imamo $KL \| AB \Rightarrow MNKL$ je trapez (srednja linija trougla je paralelna osnovici),

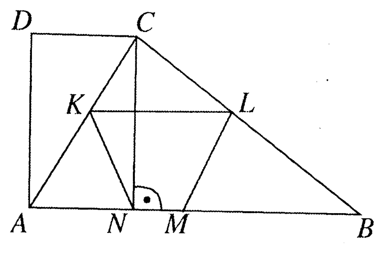
$\overline{LM} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ (osobina srednje linije trougla),

$\Delta ANC$ je pravougli i $NK$ je njegova težišnica, pa slijedi da je $\overline{NK} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. Prema tome $\overline{LM} = \overline{NK} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, pa je četverougao $KLMN$ jednakokraki trapez.

*Drugi način*: Imamo:

$KL \| AB \Rightarrow MNKL$ je trapez (srednja linija trougla je paralelna osnovici)

Konstruišimo pravougaonik $ANCD$. Tačka $K$ je središte dijagonale $AC$ tog pravougaonika, pa je $\overline{AK} = \overline{NK} = \frac{1}{2}\overline{AC}$. S druge strane je $\overline{LM} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ (osobina srednje linije trougla), odakle slijedi $\overline{LM} = \overline{NK} = \frac{1}{2}\overline{AC}$, pa je četverougao $KLMN$ jednakokraki trapez.

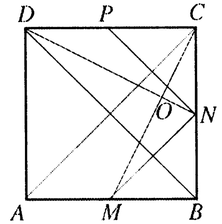


\# U kvadratu $ABCD$ tačke $M,N$ i $P$ su središta stranica $AB,BC$ i $CD$ redom. Dokazati da važi:

a) $DN \perp CM$ ;

b) $\measuredangle DNP = \measuredangle CMN$ .

Rj. a) Neka je $\{O\} = CM \cap DN$ . Očigledno je $\Delta DCN \cong \Delta BCM$ (SUS, jer je $\overline{DC} = \overline{BC}$, $\overline{CN} = \overline{BM}$, $\measuredangle DCN = \measuredangle CBM = 90^0$ ), pa odavde slijedi da je $\overline{DN} = \overline{CM}$ i $\measuredangle CDN = \measuredangle BCM$ .




Sada imamo:

$$\measuredangle OCN + \measuredangle CNO = \measuredangle CDN + \measuredangle CND = 90^0 ,$$

pa slijedi iz $\Delta OCN$ da je $\measuredangle CON = 90^0$ , tj. $DN \perp CM$ , što je trebalo dokazati.

b) Duž $PN$ je srednja linija trougla $\Delta BCD$ pa je $\overline{PN} = \frac{1}{2}\overline{BD}$ . Slično zaključujemo da je $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ jer je $MN$ srednja linija trougla $\Delta ABC$ . Pošto je $\overline{AC} = \overline{BD}$ , to je sada i $\overline{PN} = \overline{MN}$ . Također imamo da je $\overline{DP} = \overline{CN}$ i $\overline{DN} = \overline{MC}$ , pa je $\Delta DPN \cong \Delta CMN$ (SSS), a odavde je $\measuredangle DNP = \measuredangle CMN$ , što je i trebalo dokazati.

\# U kvadrat $ABCD$ stranice dužine $1$ upisan je trougao $\Delta PQR$ tako da $P \in AD, Q \in CD$ i $R \in BC$ . Dokazati da je površina trougla $\Delta PQR \leq \frac{1}{2}$ . Kada vrijedi jednakost?

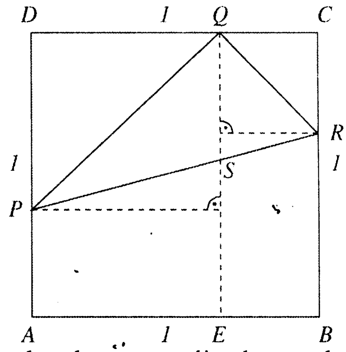
Rj. Povucimo duž $QE \parallel BC$ , $E \in AB$ . Neka je $\{S\} = PR \cap QE$ .

Sada je

$$P_{\Delta PQR} = P_{\Delta PQS} + P_{\Delta QSR} =$$

$$= \frac{1}{2}\overline{QS} \cdot \overline{AE} + \frac{1}{2}\overline{QS} \cdot \overline{EB}$$

$$= \frac{1}{2}\overline{QS}(\overline{AE} + \overline{EB}) = \frac{1}{2}\overline{QS} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{QS} \leq \frac{1}{2}$$




(jer je $\overline{QS} \leq 1$ ). q.e.d.

Jednakost vrijedi ako je jedna stranica trougla osnovica kvadrata, a treći vrh se nalazi na naspramnoj paralelnoj stranici. Tada su osnovica i visina trougla dužine $1$ .

\# U oštrouglom trouglu $\Delta ABC$ $\left(\overline{AC} < \overline{BC}\right)$ visina $h_c = CC'$ i simetrala $s = CM$ ugla $\gamma$ zaklapaju ugao od $9^0$, a simetrale spoljašnjih uglova kod tjemena $A$ i $B$ sijeku se pod uglom od $61^0$. Odrediti uglove trougla $\Delta ABC$.

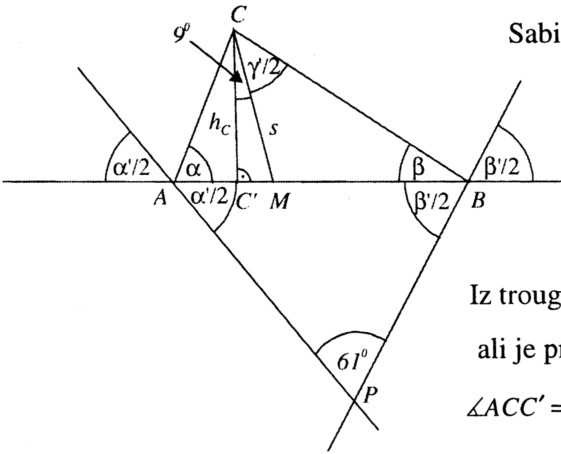
R. Neka je
$\alpha'$ - spoljašnji ugao kod vrha $A$
$\beta'$ - spoljašnji ugao kod vrha $B$

Kako je vanjski ugao trougla jednak zbiru dva nesusjedna unutrašnja ugla, to je

$$\beta' = \alpha + \gamma \text{ i } \alpha' = \beta + \gamma . \tag{1}$$

Iz trougla $\Delta ABP$ imamo

$$\frac{\alpha'}{2} + \frac{\beta'}{2} = 180^0 - 61^0 = 119^0 \Rightarrow \alpha' + \beta' = 238^0 .$$




Sabiranjem jednakosti (1), dobijamo:

$$\left(\underbrace{\alpha + \beta + \gamma}_{=180^0}\right) + \gamma = 238^0$$

$$\Rightarrow \gamma = 58^0 .$$

Iz trougla $\Delta ACC'$ imamo $\alpha + \measuredangle ACC' = 90^0$,

ali je prema uslovima zadatka

$$\measuredangle ACC' = \frac{\gamma}{2} - 9^0 = 29^0 - 9^0 = 20^0 ..$$

Zbog toga je

$$\alpha + 20^0 = 90^0 \Rightarrow \alpha = 70^0 .$$

Konačno imamo

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$
$$70^0 + \beta + 58^0 = 180^0 \Rightarrow \beta = 180^0 - 128^0 = 52^0.$$

Znači, $\alpha = 70^0, \beta = 52^0, \gamma = 58^0$.

# U trouglu $\Delta ABC$ su date stranice $a$ i $b$. Ako je $h_c = h_a + h_b$, izračunati stranicu $c$.

Rj. Površina trougla $\Delta ABC$ se može izračunati iz bilo koje od formula:

$$P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}.$$

Odavde dobijamo

$$h_a = \frac{2P}{a},\ \ h_b = \frac{2P}{b},\ \ h_c = \frac{2P}{c}.$$

Sada uvjet $h_c = h_a + h_b$ postaje:

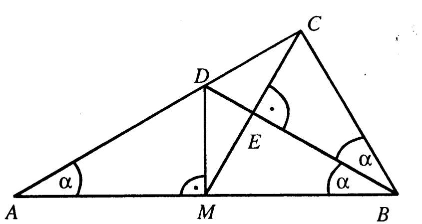
$$\frac{2P}{c} = \frac{2P}{a} + \frac{2P}{b}$$

ili nakon djeljenja sa $2P$:

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad \text{tj.}\ \frac{1}{c} = \frac{b+a}{ab} \quad \text{te} \quad c = \frac{ab}{a+b}.$$

# U trouglu $\Delta ABC$ je $\measuredangle ABC = 2\measuredangle BAC$ i težišna linija $CM$ je normalna (ortogonalna) na simetralu $BD$ ugla $\measuredangle ABC$. Odrediti uglove trougla $\Delta ABC$.

Rj. Neka je $BD$ simetrala ugla trougla $\Delta ABC$ sa vrhom (tjemenom) u $B$. Tada je $\measuredangle DBM = \frac{1}{2}\measuredangle ABC = \measuredangle BAC$. To znači da je trougao $\Delta ABD$ jednakokraki sa osnovicom $AB$. Tačka $M$ je središte osnovice, pa je $DM$ normalno na $AB$. Neka $BD$ siječe $CM$ u tački $E$.




Tada je $\Delta BEM \cong \Delta BCE$ jer je $\overline{BE} = \overline{BE}, \measuredangle MBE = \measuredangle CBE = \frac{1}{2}\measuredangle ABC$ i $\measuredangle MEB = \measuredangle CEB = 90^0$.

Iz podudarnosti slijedi da je $\overline{BM} = \overline{BC}$. Tada je $\Delta MBD \cong \Delta CBD$. Iz te podudarnosti slijedi da je $\measuredangle BCD = \measuredangle BMD = 90^0$. Dakle, $\gamma = 90^0$. Kako je $\beta = 2\alpha$, to je $90^0 = \alpha + \beta = 3\alpha$, tj. $\alpha = 30^0$ i $\beta = 60^0$.

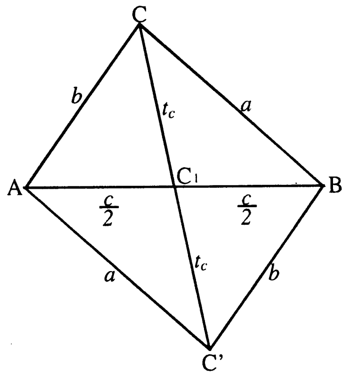
#

Neka su $a,b$ i $c$ dužine stranica trougla i $t_c$ dužina težišnice povučene iz vrha (tjemena) $C$. Dokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{a+b-c}{2} < t_c < \frac{a+b}{2}.$$

R.

Neka je $\Delta ABC$ trougao čije su dužine stanica $a,b,c$ i dužina težišne duži $\overline{CC_1} = t_c$. Na osnovu odnosa između stranice trougla i zbira drugih dviju stanica nalazimo iz trougla $\Delta AC_1C$ da je




$$b < \frac{c}{2} + t_c$$

a iz trougla $\Delta CC_1B$ da je

$$a < \frac{c}{2} + t_c .$$

Sabiranjem ovih nejednakosti dobija se

$$a + b < c + 2t_c ,$$

odnosno

$$t_c > \frac{a+b-c}{2}.$$

Dokažimo sada da je $t_c < \dfrac{a+b}{2}$.

Neka je $C'$ simetričnu tačka tački $C$ u odnosu na tačku $C_1$. Tada je $\overline{CC_1} = \overline{C_1C'}$, a kako je $\overline{AC_1} = \overline{C_1B}$, to je četverougao $AC'BC$ paralelogram. Dakle, $\overline{BC'} = \overline{AC} = b$. Iz trougla $\Delta CC'B$, dobijamo:

$$\overline{CC'} < \overline{BC} + \overline{C'B} \text{, tj. } 2t_c < a + b ,$$

pa je

$$t_c < \frac{a+b}{2}.$$

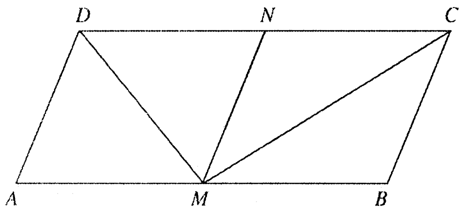
Dakle, imamo da je

$$\frac{a+b-c}{2} < t_c < \frac{a+b}{2},$$

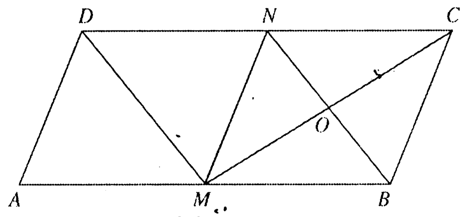
što je i trebalo dokazati.

Dat je paralelogram $ABCD$ kod koga je $\overline{AB} = 2\overline{BC}$. Središte $M$ stranice $AB$ spojeno je sa tjemenima $C$ i $D$. Izračunati koliko stepeni iznosi ugao $\measuredangle CMD$.

**Rješenje 3**. Koristićemo sliku 2. Kako su dijagonale romba ujedno i simetrale unutrašnjih uglova (poznato svojstvo romba), to su $MC$ i $MD$ simetrale dva uporedna ugla, $\measuredangle BMN$ i $\measuredangle AMN$. Zbog toga je ugao između njih jednak polovini opruženog ugla, tj. $\measuredangle CMD = 90^0$.




sl.2




sl.3

**Rješenje 4**. Neka je $N$ središte duži $CD$ i $O$ presjek dijagonala romba $CNMB$ (sl.3). Jasno je da $\overline{BN} = \overline{MD}$ i $BN \parallel MD$. Zato je $\measuredangle CMD = \measuredangle CON$ (uglovi s paralelnim kracima). Kako se dijagonale romba sijeku pod pravim uglom, tj. $\measuredangle CON = 90^0$, zaključujemo da je $\measuredangle CMD = 90^0$.

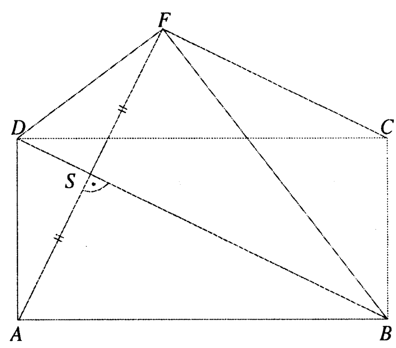
Iz tjemena $A$ pravougaonika $ABCD$ spuštena je normala na dijagonalu pravougaonika i produžena za istu dužinu do tačke $F$. Dokazati da je:

a) duž $BF$ normalna na duž $DF$;

b) četverougao $BDFC$ jednakokraki trapez.

a) Zbog $\overline{AS} = \overline{FS}$ i $\measuredangle ASD = \measuredangle FSD = 90^0$ slijedi: $\Delta ASD \cong \Delta FSD$ te $\Delta ABS \cong \Delta BFS$. Sada je $\overline{AD} = \overline{DF}$ i $\overline{AB} = \overline{BF}$; što znači da je četverougao $ABFD$ deltoid. Kako je $\measuredangle DAB = 90^0$, to je i $\measuredangle DFB = 90^0$, tj. $DF \perp BF$.

b) Kako je $\overline{AD} = \overline{DF} = \overline{BC}$, to je $\Delta DBF \cong \Delta DCB$ pa je $\overline{BF} = \overline{DC}$, pa je četverougao $BDFC$ jednakokraki trapez.

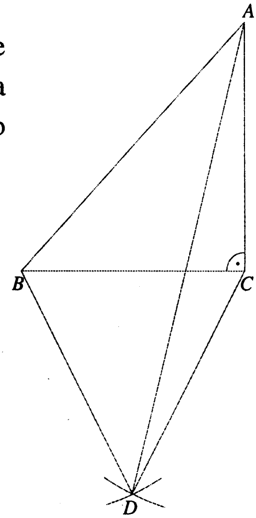


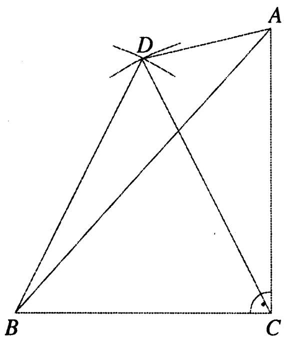
**#** Dat je jednakokrako-pravougli trougao $\Delta ABC$ s pravim uglom kod vrha $C$. Nad stranicom (katetom) $BC$ konstruisan je jednakostranični trougao $\Delta BCD$ (razlikovati dva slučaja). Izračunati veličinu ugla $\measuredangle ADB$.

R: Razlikujemo dva slučaja:

$1^0$ Očigledno je $\measuredangle ACD = 90^0 - 60^0 = 30^0$. Kako je $\overline{CD} = \overline{CA}$, slijedi da je trougao $\Delta\ CAD$ jednakokraki; pa je $\measuredangle CAD = \measuredangle CDA = 75^0$, a zbog $\measuredangle CBD = 60^0$, zaključujemo da je $\measuredangle ADB = \measuredangle CDA + \measuredangle CDB$, tj. $\measuredangle ADB = 75^0 + 60^0 = 135^0$.

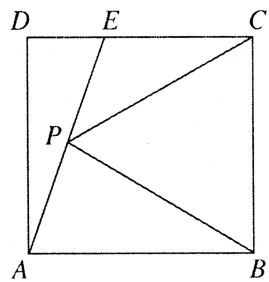
$2^0$ Očigledno je $\measuredangle ACD = 90^0 + 60^0 = 150^0$. Kako je $\overline{CA} = \overline{CD}$, slijedi da je trougao $\Delta\ CAD$ jednakokraki pa je $\measuredangle CAD = \measuredangle CDA = 15^0$, a zbog $\measuredangle CDB = 60^0$, zaključujemo da je $\measuredangle ADB = \measuredangle CDB - \measuredangle CDA$, tj. $\measuredangle ADB = 60^0 - 15^0 = 45^0$.




**#** Dat je kvadrat $ABCD$ i unutar njega je odabrana tačka $P$ tako da je trougao $\Delta BCP$ jednakostraničan. Prava $AP$ siječe stranicu $CD$ u tački $E$. Odredite mjerni broj ugla $\measuredangle CPE$. Odgovor obrazložiti!

R: Budući da je $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{BP}$ zaključujemo da je trougao $\Delta ABP$ jednakokraki. To znači da je $\angle PAB = \angle APB$. Nadalje iz $\angle PBC = 60^0$ i $\angle ABC = 90^0$ slijedi da je $\angle ABP = 30^0$. Zbir unutrašnjih uglova bilo kog trougla je $180^0$, pa i u trouglu $\Delta ABP$. Zbog toga je $2 \cdot \angle APB = 180^0 - 30^0 = 150^0$. Odavde je $\angle APB = 75^0$. Sada nalazimo da je $\angle CPE = 180^0 - 75^0 - 60^0 = 45^0$.



#

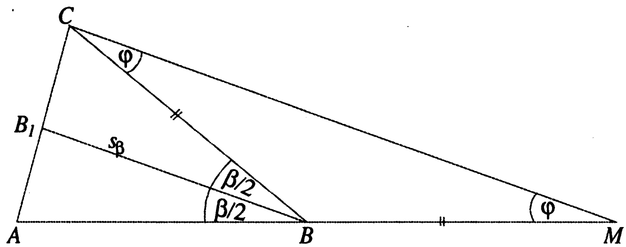
Na produžetku stranice $AB$ trougla $\Delta ABC$ iza $B$ u odnosu na $A$ data je tačka $M$, tako da je $\overline{BM} = \overline{BC}$. Dokazati da je prava $MC$ paralelna simetrali ugla $\Delta ABC$.

Rj.

P: $\overline{BM} = \overline{BC}$, $BB_1 = s_\beta$ simetrala ugla $\measuredangle ABC$.

T: $MC \| BB_1$.

Zbog $\overline{BM} = \overline{BC}$, trougao $\Delta BMC$ je jednakokraki pa je $\varphi = \measuredangle BMC = \measuredangle BCM$. Po teoremi o vanjskom uglu trougla $\Delta BMC$ je $\measuredangle ABC = 2\varphi$, tj. $\beta = 2\varphi$, a odavde $\varphi = \dfrac{\beta}{2}$. Pošto je sada $\measuredangle ABB_1 = \measuredangle BMC = \varphi = \dfrac{\beta}{2}$, to je $BB_1 \| MC$ (uglovi sa paralelnim



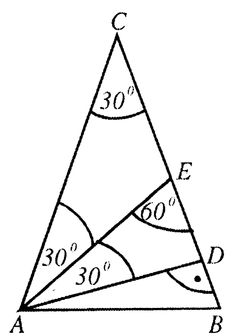

kracima), što je i trebalo dokazati.

#

U trouglu $\Delta ABC$ je $\overline{AC} = \overline{BC}$, a visina $AD$ sa simetralom $AE$ ($E \in BC$) ugla $\measuredangle DAC$ gradi ugao od $30^0$. Naći uglove trougla $\Delta ABC$ i dokazati da je $\overline{AE} = \overline{EC}$. Odgovor obrazložiti!

Rj.

Trougao $\Delta ADE$ je pravougli kod kojeg je jedan oštar ugao $30^0$. Tada je drugi njegov ugao $60^0$. Dakle, $\measuredangle AED = 60^0$. Ugao $\measuredangle AED$ je vanjski ugao trougla $\Delta AEC$, pa je $60^0 = \measuredangle AED = \measuredangle ACE + 30^0$. Odavde slijedi $\measuredangle ACE = 30^0$. Kako je trougao $\Delta ABC$ jednakokraki to je $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC = 75^0$. Trougao $\Delta AEC$ je jednakokraki jer ima dva unutrašnja ugla po $30^0$. Zato je $\overline{AE} = \overline{EC}$.



Dat je paralelogram $ABCD$ kod koga je $\overline{AB} = 2\overline{BC}$. Središte $M$ stranice $AB$ spojeno je sa tjemenima $C$ i $D$. Izračunati koliko stepeni iznosi ugao $\measuredangle CMD$.

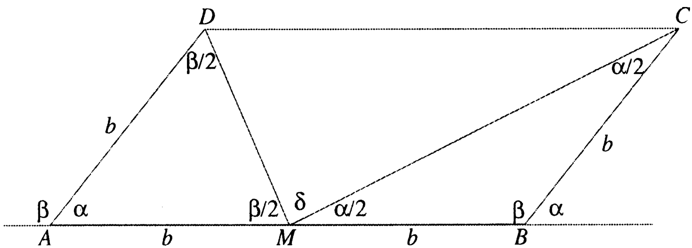
**Rješenje 1**. Trouglovi $\Delta AMD$ i $\Delta BMC$ su jednakokraki (sl.1). Kod trougla $\Delta AMD$ vanjski ugao u vrhu $A$ je $\beta$ (uglovi sa paralelnim kracima), a kod trougla $\Delta BMC$ vanjski ugao u vrhu $B$ je $\alpha$. To znači da je

$$\measuredangle AMD = \measuredangle ADM = \frac{\beta}{2} \text{, odnosno}$$

$$\measuredangle BMC = \measuredangle MCB = \frac{\alpha}{2}.$$

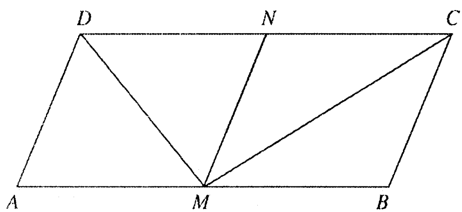
Očigledno, traženi ugao $\delta = \measuredangle CMD = 180^0 - \dfrac{\alpha + \beta}{2}$,

tj. zbog $\alpha + \beta = 180^0$; $\delta = 180^0 - 90^0 = 90^0$.




sl.1

**Rješenje 2**. Neka je $N$ središte stranice $CD$ (sl.2). Tada je dati paralelogram podijeljen na dva podudarna romba $AMND$ i $BCNM$, pa je $\overline{MN} = \overline{CN} = \overline{ND}$. Zbog toga kružnica kojoj je duž $CD$ prečnik sadrži tačku $M$. Budući da je svaki ugao nad prečnikom prav, to je $\measuredangle CMD = 90^0$.

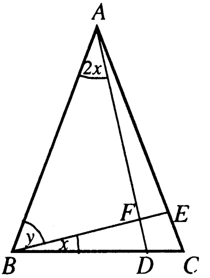



sl.2

#

Trougao $\Delta ABC$ je jednakokraki kod koga je $\overline{AB} = \overline{AC}$. Neka su tačke $D \in BC$ i $E \in AC$ takve da je $\measuredangle EBC = \frac{1}{2}\measuredangle BAD$ i neka je tačka $F$ presječna tačka pravih $AD$ i $BE$, tj. $\{F\} = AD \cap BE$. Dokazati da je trougao $\Delta AFE$ jednakokraki.

R. Neka je $\measuredangle EBC = x$, te $\measuredangle BAD = 2x$ (po uslovu zadatka). Uzmimo da je $\measuredangle EBA = y$. Pošto je trougao $\Delta ABC$ jednakokraki, to je:




$$\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = x + y . \qquad (1)$$

Sada je $\measuredangle AFE = \measuredangle BAF + \measuredangle ABF = 2x + y$ (kao vanjski ugao trougla $\Delta ABF$). Također

je $\measuredangle AEF = \measuredangle EBC + \measuredangle ACB \overset{(1)}{=} x + x + y = 2x + y$ (kao vanjski ugao trougla $\Delta BEC$). Dobili smo da je: $\measuredangle AFE = \measuredangle AEF \left(= 2x + y\right)$, što znači da je trougao $\Delta AFE$ jednakokraki. Ovim je tvrdnja dokazana.

#

Simetrale uglova $\measuredangle ABC$ i $\measuredangle ACB$ trougla $\Delta ABC$ se sijeku u tački $I$. Neka su tačke $M$ i $N$ simetrične tački $I$ u odnosu na stranice $BC$ i $AB$ trougla. Koliko iznosi ugao $\measuredangle ABC$ ako je $BM \perp BN$?

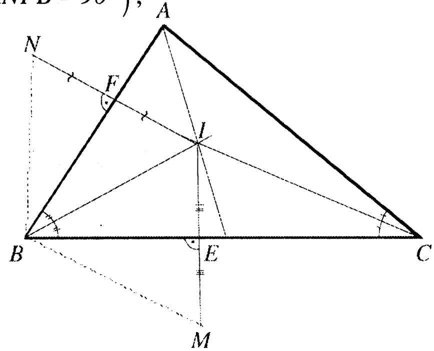
R. Neka je $IM \cap BC = \{E\}$ i $IN \cap AB = \{F\}$. Slijedi da je $\overline{IE} = \overline{EM}$ i $\overline{IF} = \overline{FN}$. Kako je

$$\Delta IEB \cong \Delta MEB \ \left(\overline{BE} = \overline{BE},\ \overline{IE} = \overline{EM},\ \measuredangle IEB = \measuredangle MEB = 90^0\right)$$

i $\Delta IFB \cong \Delta NFB \ \left(\overline{BF} = \overline{BF},\ \overline{IF} = \overline{FN},\ \measuredangle IFB = \measuredangle NFB = 90^0\right)$,

to dobijamo da je

$$\measuredangle IBE = \measuredangle EBM \ \text{ i } \ \measuredangle IBF = \measuredangle FBN .$$




Kako je $IB$ simetrala ugla $\measuredangle ABC$ trougla, to je

$$\measuredangle NBF = \measuredangle FBI = \measuredangle IBE = \measuredangle EBM ,$$

pa je $BM \perp BN$ ako i samo ako je $\measuredangle ABC = 45^0$.

#

Neka je četverougao $ABCD$ paralelogram. Tačka $M$ je središte stranice $BC$, a tačka $P$ je podnožje normale spuštene iz vrha $D$ na pravu $AM$. Dokazati da je $\overline{CP} = \overline{AB}$.

R.

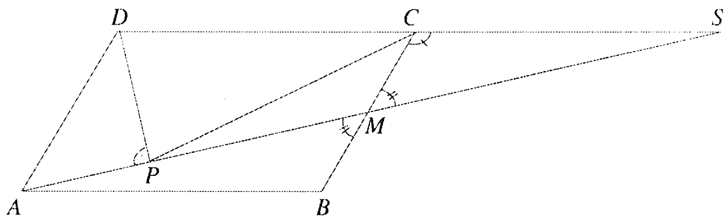
Neka je $S$ presječna tačka pravih $CD$ i $AM$, tj. $CD \cap AM = \{S\}$. Pošto je $\overline{CM} = \overline{BM}$, $\measuredangle AMB = \measuredangle SMC$ (unakrsni) i $\measuredangle ABM = \measuredangle MCS$ (naizmjenični), to je po pravilu USU: $\Delta ABM \cong \Delta SCM$, pa je

$$\overline{CS} = \overline{AB}\ . \qquad (1).$$

Kako je u paralelogramu

$$\overline{AB} = \overline{CD}, \qquad (2)$$

to dobijamo da je iz (1) i (2): $\overline{CS} = \overline{CD}$, pa je $CP$ težišnica pravouglog trougla $\Delta PDS$. Duž $CP$ je ujedno poluprečnik opisanog kruga pravouglog trougla $\Delta PDS$ čiji je centar tačka $C$ (Periferijski ugao $\measuredangle DPS$ je prav nad prečnikom $DS$). Dakle, $\overline{CP} = \overline{DC}$, te $\overline{CP} = \overline{AB}$, q.e.d.

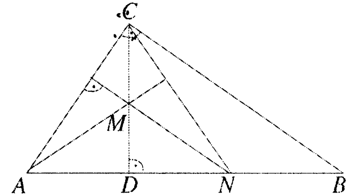



#

Neka je $CD$ visina na hipotenuzu pravouglog trougla $\Delta ABC$, tačka $M$ središte duži $CD$ i tačka $N$ središte duži $BD$. Dokazati da je prava $AM$ normalna (okomita) na pravu $CN$.

R.

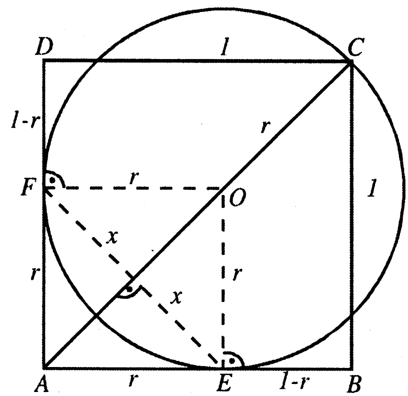
U trouglu $\Delta BCD$ duž $MN$ je srednja linija, pa je $MN \| BC$. Kako je $BC \perp AC$, slijedi da je i $MN \perp AC$. S obzirom da je $CD \perp AN$, to znači da je tačka $M$ ortocentar trougla $\Delta ANC$, pa je i $AM$ visina tog trougla, tj. $AM \perp CN$, q.e.d.



Zadan je kvadrat $ABCD$ dužine stranice $1dm$. Naći poluprečnik kružnice koja dodiruje njegove dvije stranice i prolazi kroz njegov jedan vrh.

Neka je $ABCD$ kvadrat stranice $a = 1dm$ i $r$ poluprečnik kružnice koja dodiruje stranice $AB$ i $AD$ i prolazi kroz vrh (tjeme) $C$. Neka je $\overline{OA} = \overline{EF} = x$ (dijagonala kvadrata $AEOF$). Primjenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao $\Delta AEF$ nalazimo

$$x^2 = r^2 + r^2 \text{, tj. } x = r\sqrt{2} .$$




Analogno, iz pravouglog trougla $\Delta ABC$ je

$$(x + r)^2 = 1^2 + 1^2 \text{, tj. } x^2 + 2xr + r^2 = 2 .$$

Ako u posljednju jednačinu uvrstimo $x = r\sqrt{2}$, dobićemo poslije sređivanja

$$r^2(3 + 2\sqrt{2}) = 2,$$

$$r^2 = \frac{2}{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{2}{(\sqrt{2} + 1)^2}$$

i

$$r = \sqrt{\frac{2}{(\sqrt{2} + 1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - 1} = 2 - \sqrt{2} ,$$

dakle,

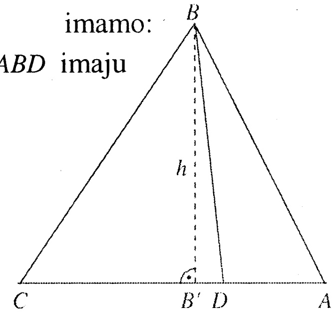
$$r = \left(2 - \sqrt{2}\right)dm .$$

#

Površina trougla $\Delta ABC$ iznosi $18cm^2$. Tačka $D$ uzeta je na stranici $AC$, tako da je $\overline{DC} = 2\overline{AD}$. Naći površine trouglova $\Delta ABD$ i $\Delta DBC$.

Rj.

Iz uvjeta $\overline{DC} = 2\overline{AD}$ zbog $\overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AC}$ imamo: $\overline{AD} + 2\overline{AD} = \overline{AC}$, tj. $\overline{AC} = 3\overline{AD}$. Trouglovi $\Delta ABC$ i $\Delta ABD$ imaju zajedničku visinu ($\overline{BB'} = h$) iz vrha $B$, pa je:




$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(3\overline{AD}\right) \cdot h =$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\overline{AD} \cdot h\right) = 3P_{\Delta ABD}$$

tj. $P_{\Delta ABD} = \frac{1}{3} P_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot 18cm^2 = 6cm^2$.

Sada je $P_{\Delta DBC} = P_{\Delta ABC} - P_{\Delta ABD} = 18cm^2 - 6cm^2 = 12cm^2$.

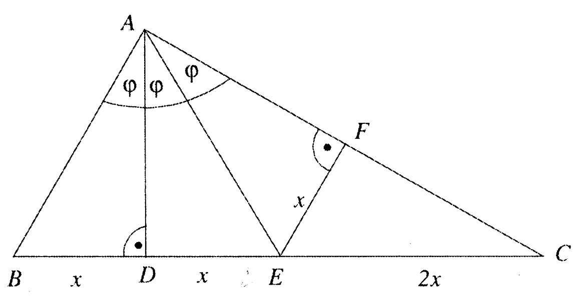
#

Težišnica i visina iz vrha $A$ u trouglu $\Delta ABC$ dijele ugao $\alpha$ na tri jednaka diela. Koliki su uglovi trougla $\Delta ABC$?

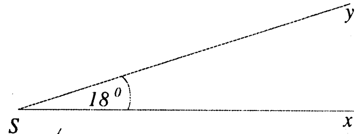
Rj.

Neka su tačke $D$ i $E$ podnožja visine i težišnice iz vrha $A$ i neka je $EF$ normalno na $AC$. Kako je $\measuredangle BAD = \measuredangle DAE = \measuredangle EAF = \varphi$, to su duži $AD$ i $AE$ simetrale uglova $\measuredangle BAE$ i $\measuredangle DAF$, pa je $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EF} = x$ jer su pravougli trouglovi $\Delta ABD, \Delta ADE, \Delta AEF$ podudarni po pravilu USU. Kako je $E$ podnožje težišnice, to je $\overline{BE} = \overline{EC} = 2x$.

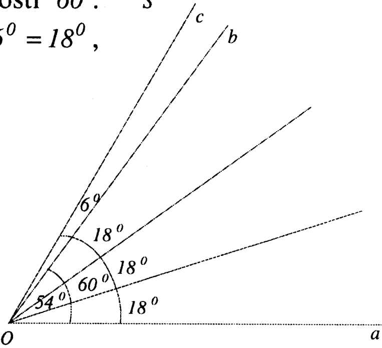
Trougao $\Delta CEF$ je pravougli i $\overline{CE} = 2\overline{EF}$ pa je $\measuredangle E = 60^0, \measuredangle C = 30^0$. Sada je $\measuredangle DAC = 60^0$, tj. $2\varphi = 60^0$, te $\varphi = 30^0$, tj. $\measuredangle A = 3\varphi = 90^0$, $\measuredangle B = 60^0$.



Dat je ugao od $54^0$. Kako ćeš samo pomoću šestara i linijara podijeliti taj ugao na tri jednaka dijela? Opiši postupak. (Prenesi ugao od $54^0$ sa date slike, ili ga nacrtaj pomoću uglomjera).




Rj. Nacrtajmo ugao od $54^0$ i dopunimo ga pomoću šestara i linijara do vrijednosti $60^0$. Razlika uglova $60^0 - 54^0 = 6^0$, a $3 \cdot 6^0 = 18^0$, što iznosi $\frac{1}{3}$ od $54^0$.




Konstrukcija:

$1^0$ $\angle aOb = 54^0$;

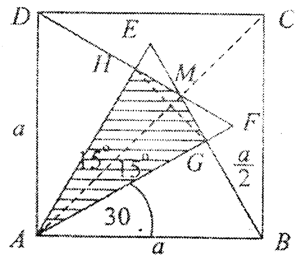
$2^0$ $\angle aOc = 60^0$;

$3^0$ $\angle bOc = 6^0 = 60^0 - 54^0$;

$4^0$ $\angle xSy = 3 \cdot 6^0 = 18^0$.

Dat je kvadrat $ABCD$ stranice $a$. Nad dvjema njegovim susjednim stranicama konstruišu se dva jednakostranična trougla u unutrašnjosti kvadrata. Izračunaj površinu zajedničkog dijela tih trouglova.

Rj. Neka je $ABCD$ dati kvadrat a $\Delta ABE$ i $\Delta ADF$ jednakostranični trouglovi konstruisani u unutrašnjosti tog kvadrata. Zajednički dio ovih trouglova je četverougao $AGMH$. Očigledno, četverougao $AGMH$ je deltoid. Deltoid se sastoji od dva podudarna pravougla trougla: $\Delta AGM$ i $\Delta AHM$. Izračunajmo površinu $\Delta AGM$.




Njegove katete su $\overline{AG} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (visina jednakostraničnog trougla) i $\overline{GM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{GE} = \frac{1}{4} a$ ( $\Delta GMF \cong \Delta HME$ ).

Dakle,

$$P_{\Delta AGM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{4} = \frac{1}{16} a^2 \sqrt{3},$$

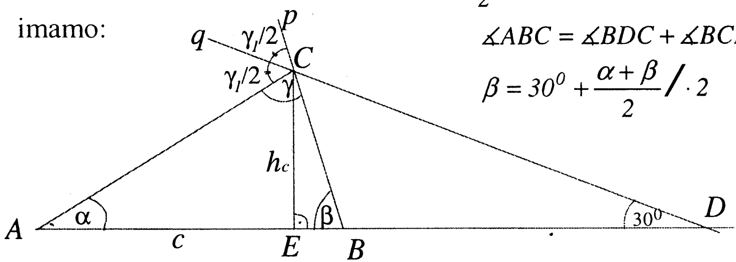
pa je površina deltoida $AGMH$ jednaka $P = 2 \cdot \frac{1}{16} a^2 \sqrt{3} = \frac{1}{8} a^2 \sqrt{3}$.

\# Nacrtaj trougao $\Delta ABC, (\beta > \alpha)$ i visinu $h_c$ na stranicu $c$. Tačku u kojoj visina siječe stranicu $c$ označi sa $E$. Produži stranicu $BC$ preko vrha $C$, te konstruiši simetralu vanjskog ugla uz vrh $C$. Tačku u kojoj simetrala siječe pravu $AB$ označi da $D$. Ako je $\frac{1}{2}\overline{CD} = \overline{CE}$, odrediti koliko je $\beta - \alpha$.

Rj. Iz $\frac{1}{2}\overline{CD} = \overline{CE}$ slijedi $\overline{CD} = 2\overline{CE}$, pa je pravougli trougao $\Delta CED$ polovina jednakostraničnog trougla stranice $\overline{CD}$, tj. $\overline{CD} = 2h_c$, te $\measuredangle EDC = 30^0$.

Sada je
$$\measuredangle\ pCq = \frac{1}{2}\gamma_1 = \frac{1}{2}(180^0 - \gamma) = 90^0 - \frac{1}{2}(180^0 - \alpha - \beta) = \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Imamo da je ugao $\measuredangle BCD = \measuredangle pCq = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Po teoremi o vanjskom uglu trougla imamo:




$\measuredangle ABC = \measuredangle BDC + \measuredangle BCD$, tj.

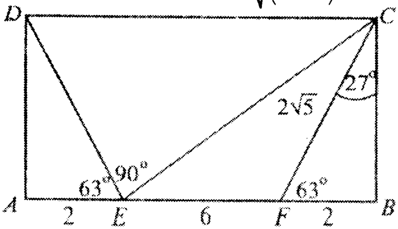
$\beta = 30^0 + \frac{\alpha+\beta}{2} \,/\cdot 2 \quad \Rightarrow 2\beta = 60^0 + \alpha + \beta$

$\Rightarrow \alpha - \beta = -60^0$, tj.

$\beta - \alpha = 60^0$.

\# Na stranici $AB$ datog pravougaonika $ABCD$ istaknute su tačke $E$ i $F$, tako da je $\overline{AE} = \overline{BF} = 2, \overline{EF} = 6, \overline{FC} = 2\sqrt{5}, \measuredangle BFC = 27^0$. Odrediti uglove $\measuredangle ECF$ i $\measuredangle CEF$.

Rj. Iz pravouglog trougla $\Delta BCF$ nalazimo: $\measuredangle BFC = 63^0$ i primjenom Pitagorine teoreme: $\overline{BC} = \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - 2^2} = 4$. Dalje, primjenom iste teoreme na



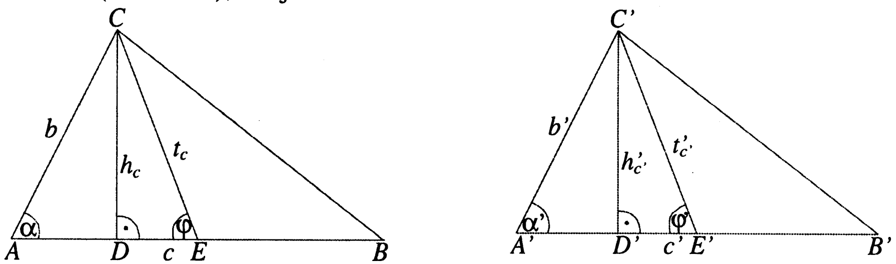

pravougli trougao $\Delta BCE$ dobijamo
$$\overline{CE} = \sqrt{(6+2)^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}.$$
Jednostavno se zaključuje da je $\Delta AED \cong \Delta BFC$, pa trougao $\Delta CDE$ ima stranice dužina:

$\overline{DE} = 2\sqrt{5}, \overline{CE} = 4\sqrt{5}, \overline{CD} = 10$ i tačna je jednakost $\overline{CD}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2$, tj. $10^2 = \left(4\sqrt{5}\right)^2 + \left(2\sqrt{5}\right)^2$, na osnovu teoreme obrnute Pitagorinoj teoremi zaključujemo da je $\Delta CDE$ pravougli i da je $\measuredangle CED = 90^0$. Sada nalazimo tražene uglove: $\measuredangle CEF = 180^0 - 63^0 - 90^0 = 27^0$ i $\measuredangle ECF = 63^0 - 27^0 = 36^0$.

#

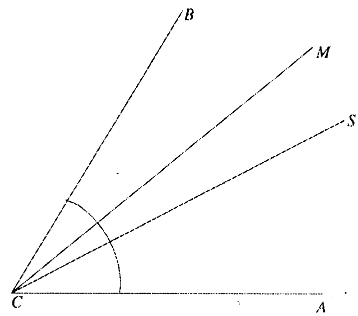
Dokazati da su dva trougla $\Delta ABC$ i $\Delta A'B'C'$ podudarna ako je $c=c', h_c=h_{c'}, t_c=t_{c'}$, gdje su $h_c$ i $h_{c'}$ visine, a $t_c$ i $t_{c'}$ težišnice trouglova $\Delta ABC$ i $\Delta A'B'C'$.

Rj. Kako je $h_c = h_{c'}, t_c = t_{c'}$, $\measuredangle D = \measuredangle D' = 90^0$ to je $\Delta CDE \cong \Delta C'D'E'$ (stav SSU), pa je $\measuredangle DEC = D'E'C'$, tj. $\varphi = \varphi'$. Kako je $c=c'$, to je i $\frac{c}{2}=\frac{c'}{2}$, pa je zbog $\overline{AE}=\overline{A'E'}$ (tj. $\frac{c}{2}=\frac{c'}{2}$), $\measuredangle AEC = \measuredangle A'E'C'$ ($\varphi=\varphi'$), $\overline{EC}=\overline{E'C'}$ također $\Delta AEC \cong \Delta A'E'C'$ (stav SUS), pa je zbog toga i $b=b'$ te $\alpha=\alpha'$. Sada iz $b=b', \alpha=\alpha', c=c'$, slijedi $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$ (stav SUS), što je i trebalo dokazati.




#

Zadani su ugao $\measuredangle ACB$ ($C$ je njegov vrh, a tačke $A$ i $B$ su na njegovim kracima), poluprava $CM$ unutar ugla $\measuredangle ACB$ i poluprava $CS$ koja polovi $\measuredangle ACB$. Dokazati da je $\measuredangle SCM = \frac{1}{2}(\measuredangle MCA - \measuredangle MCB)$.




Rj. Iz slike očigledno vrijede ove jednakosti:

$$\measuredangle MCA = \measuredangle SCA + \measuredangle SCM \qquad (1)$$

$$\measuredangle MCB = \measuredangle SCB - \measuredangle SCM,$$

a zbog $\measuredangle SCB = \measuredangle SCA$ je

$$\measuredangle MCB = \measuredangle SCA - \measuredangle SCM. \qquad (2)$$

Ako oduzmemo (2) od (1), dobijamo: $\measuredangle MCA - \measuredangle MCB =$
$= \measuredangle SCA + \measuredangle SCM - (\measuredangle SCA - \measuredangle SCM) = 2\measuredangle SCM$

ili $\quad \measuredangle SCM = \frac{1}{2}(\measuredangle MCA - \measuredangle MCB)$.

\# Magični kvadrat reda $3\times3$ je takav kvadrat kod kojeg se sabiranjem po tri broja u svim pravcima (horizontalno, vertikalno i na obje dijagonale) dobija uvijek isti broj. Popuniti prazna polja u kvadratu, pa da on bude magičan kvadrat.

| | | |
|---|---|---|
| | 21 | 14 |
| | | 19 |
| 20 | | |

R: · Neka je centralni broj jednak $x$ (sl. 1.). Tada je karakteristični zbir magičnog kvadrata jednak $20+x+14=34+x$ (dijagonala). Izračunavanjem preostalih brojeva i upoređivanjem sa karakterističnim zbirom dobija se jednačina $x-1+x+x+1=34+x$ ili $2x=34$, pa je $x=17$. Rješenje je prikazano na slici 2.

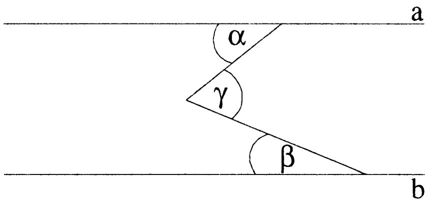
| | | |
|---|---|---|
| $x-1$ | 21 | 14 |
| | $x$ | 19 |
| 20 | | $x+1$ |

sl.1

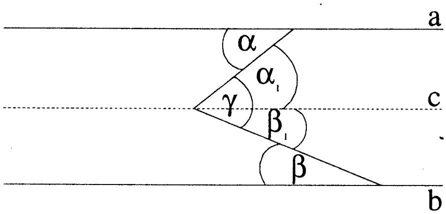
| | | |
|---|---|---|
| 16 | 21 | 14 |
| 15 | 17 | 19 |
| 20 | 13 | 18 |

sl.2

\# Dati su uglovi $\alpha=42^0 54'$ i $\beta=35^0 37'$. Izračunati ugao $\gamma$ ako su prave $a$ i $b$ paralelne (vidi sliku).




R: · Povucimo kroz vrh ugla $\gamma$ pravu $c$ tako da je $c\|a\|b$. Očigledno je $\gamma=\alpha_1+\beta_1$. Kako je $\alpha=\alpha_1$ i $\beta=\beta_1$ (kao uglovi sa paralelnim kracima), to je $\gamma=\alpha_1+\beta_1=$ $=\alpha+\beta=42^0 54'+35^0 37'=77^0 91'=78^0 31'$.



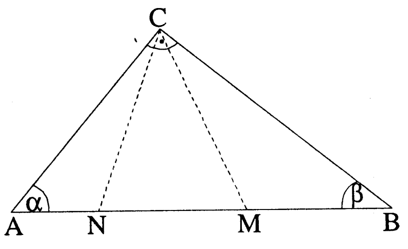
\# Postoji li trougao čije su dužine visina $h_a = 2cm, h_b = 4cm, h_c = 6cm$?

R. Pretpostavimo da postoji trougao čije su stranice dužina $a, b$ i $c$, a odgovarajuće visine imaju dužine $h_a = 2cm, h_b = 4cm, h_c = 6cm$. Tada je $P = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, a odavde je $a = 2b = 3c$, pa su stranice trougla $a, \frac{a}{2}$ i $\frac{a}{3}$. Međutim, znamo da zbir dvije stranice mora biti veći od treće stranice, pa kako je $\frac{a}{2} + \frac{a}{3} = \frac{5a}{6} < a$, zaključujemo da ovakav trougao ne postoji.

\# Na hipotenuzi $AB$ pravouglog trougla $\Delta ABC$ date su tačke $M$ i $N$ tako da je $\overline{AM} = \overline{AC}$ i $\overline{BN} = \overline{BC}$. Izračunati ugao $\measuredangle MCN$.

R. Zbog $\overline{AM} = \overline{AC}$ i $\overline{BN} = \overline{BC}$ slijedi da su trouglovi $\Delta ACM$ i $\Delta BCN$ jednakokraki, tj. $\measuredangle AMC = \measuredangle ACM = \frac{1}{2}(180^0 - \alpha) = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$, te slično

$$\measuredangle BCN = \measuredangle BNC = \frac{1}{2}(180^0 - \beta) = 90^0 - \frac{\beta}{2}.$$




Dakle,

$$\measuredangle MCN = 180^0 - (\measuredangle MNC + \measuredangle NMC) =$$

$$= 180^0 - \left(90^0 - \frac{\alpha}{2} + 90^0 - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} =$$

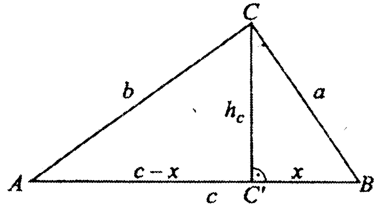
$$= \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \cdot 90^0 = 45^0.$$

#

Dužine stranica trougla $\Delta ABC$ su $a=13cm, b=14cm, c=15cm$. Kolike su dužine njegovih visina?

R: Neka je $\Delta ABC$ trougao čije su dužine stranica $a=13cm, b=14cm, c=15cm$ i neka je $h_c = CC'$ dužina njegove visine iz vrha $C$.

*I način*: Neka je $\overline{C'B}=x$, tada je $\overline{AC'}=c-x$. Primjenom Pitagorine teoreme na pravougle trouglove $\Delta AC'C$ i $\Delta BC'C$ nalazimo: $h_c^2=b^2-(c-x)^2, h_c^2=a^2-x^2$; $b^2-(c-x)^2=a^2-x^2$, pa je




$$x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c},$$

odnosno

$$x=\frac{13^2+15^2-14^2}{2\cdot 15}cm=\frac{33}{5}cm.$$

Dužina visine $h_c$ je $h_c=\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{169-\left(\frac{33}{5}\right)^2}\,cm=\sqrt{\frac{3136}{25}}cm=\frac{56}{5}cm$.

Površina trougla je $P=\frac{1}{2}c\cdot h_c=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot\frac{56}{5}cm^2=84cm^2$.

Dužine drugih dviju visina jednostavno nalazimo:

$$h_a=\frac{2P}{a}=\frac{2\cdot 84}{13}cm=\frac{168}{13}cm,\ h_b=\frac{2P}{b}=\frac{2\cdot 84}{14}cm=12cm.$$

*II način*: Izračunajmo površinu trougla koristeći Heronov obrazac $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ gdje je $s=\frac{a+b+c}{2}$ poluobim trougla.

Dakle, $s=\frac{13+14+15}{2}=21$, pa je

$$P=\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)}cm^2=$$
$$=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}cm^2=\sqrt{3\cdot 7\cdot 2\cdot 4\cdot 7\cdot 2\cdot 3}cm^2$$
$$=\sqrt{3^2\cdot 4^2\cdot 7^2}cm^2=3\cdot 4\cdot 7cm^2=84cm^2.$$

Dužine visina nalazimo jednostavno:

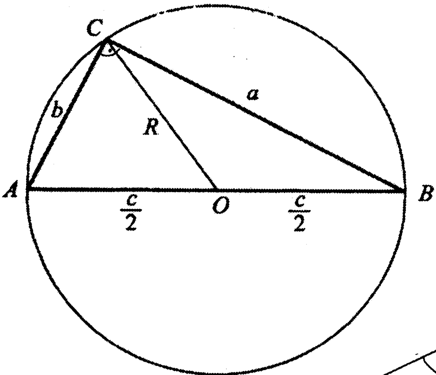
$$h_a=\frac{2P}{a}=\frac{168}{13}cm,\ h_b=\frac{2P}{b}=\frac{168}{14}cm$$
$$=12cm,\ h_c=\frac{2P}{c}=\frac{168}{15}=\frac{56}{5}cm.$$

\# Dokazati da za pravougli trougao vrijedi nejednakost $R \geq \sqrt{P}$, gdje je $R$ poluprečnik opisanog kruga tog trougla, a $P$ njegova površina.

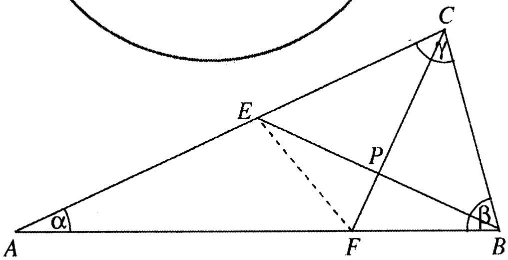
Rj. Neka je $\Delta ABC$ pravougli trougao s pravim uglom kod tjemena $C$; $\overline{OC} = R$ je poluprečnik opisanog kruga oko tog trougla. Na osnovu Pitagorine teoreme je

$c^2 = a^2 + b^2$, a kako je $R = \frac{c}{2}$, to je $c = 2R$.

Iskoristimo sljedeću nejednakost $(a-b)^2 \geq 0$, odnosno $a^2 + b^2 \geq 2ab$, gdje znak jednakosti važi ako i samo ako je $a = b$.




Sada imamo $(2R)^2 = c^2 = a^2 + b^2 \geq 2ab$, a odavde je $R^2 \geq \frac{ab}{2}$, odnosno, $R \geq \sqrt{\frac{ab}{2}} = \sqrt{P}$, jer je površina trougla upravo jednaka $P = \frac{ab}{2}$. Za $a = b$ trougao je jednakokrako-pravougli i tada važi znak jednakosti u dokazanoj nejednakosti.




\# U trouglu $\Delta ABC$ je ugao $\beta = 75^0$ i ugao $\gamma = 80^0$. Uzete su tačke $E \in AC$ i $F \in AB$ tako da je ugao $\measuredangle FBE = 25^0$ i ugao $\measuredangle FCB = 40^0$. Izračunati ugao $\measuredangle AEF$.

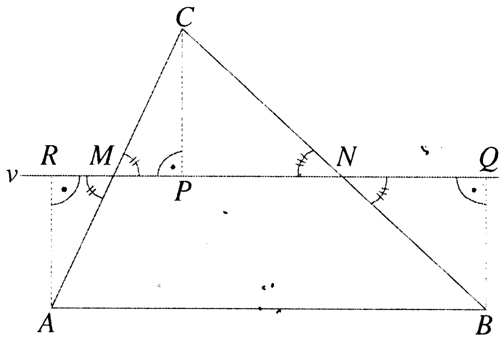
Rj. Neka je $\{P\} = BE \cap CF$. Pošto je $\gamma = \measuredangle ACB = 80^0$, $\beta = \measuredangle ABC = 75^0$, $\measuredangle FBE = 25^0$, to je $\measuredangle EBC = 75^0 - 25^0 = 50^0$, pa je zbog $\gamma = 80^0$ također $\measuredangle BEC = 50^0$, tj. $\Delta EBC$ je jednakokraki, a zbog $\measuredangle FCB = 40^0$ je $CF$ simetrala stranice $BE$. Dakle, imamo: $\overline{BC} = \overline{EC}$ i $\overline{BP} = \overline{PE}$.

$CP$ je visina trougla $\Delta BEC$ pa je i $\measuredangle EPF = \measuredangle BPF = 90^0$, znači $\Delta FPB \cong \Delta FPE$ (SUS), to je: $\measuredangle FEP = \measuredangle FBP = 25^0$. Sada je $\measuredangle AEF = 180^0 - (50^0 + 25^0) = 105^0$.

#

Dat je trougao $\Delta ABC$. Konstruisati pravu $p$ koja je jednako udaljena od vrhova $A, B, C$ datog trougla. Dati dokaz konstrukcije. Koliko takvih pravih postoji?

Rj. Konstruišimo pravu $p$ koja sadrži duž $MN$, a duž $MN$ je srednja linija $\Delta ABC$ ($M$ je središte stranice $AC$, a $N$ središte stranice $BC$ trougla $\Delta ABC$). Kako je $MN \| AB$ (i $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB}$), to imamo da je $\Delta AMR \cong \Delta MCP$ ($\overline{AM} = \overline{CM}$, $\measuredangle AMR = \measuredangle PMC$ (unakrsni), $\measuredangle ARM = \measuredangle CPM = 90^0$) te $\Delta CPN \cong \Delta BNQ$ ($\overline{BN} = \overline{CN}$, $\measuredangle CNP = \measuredangle BNQ$ (unakrsni), $\measuredangle CPN = \measuredangle BQN = 90^0$), a iz tih podudarnih trouglova slijedi da je $\overline{AR} = \overline{CP} = \overline{BQ}$.



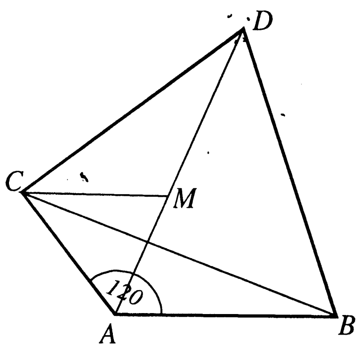

Očigledno, postoje još dvije tražene prave koje sadrže ostale dvije srednje linije trougla $\Delta ABC$.

#

Dat je trougao $\Delta ABC$ u kome je ugao $\measuredangle BAC = 120^0$. Na simetrali ugla $\measuredangle BAC$ data je tačka $D$ tako da je $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$. Dokazati da je trougao $\Delta BCD$ jednakostranični.

Rj. Na simetrali $AD$ izaberimo tačku $M$ tako da je $\overline{AM} = \overline{AC}$. Pošto je $\measuredangle CAM = 60^0$, to je trougao $\Delta ACM$ jednakostraničan.

Sada je $\measuredangle CMD = 180^0 - \measuredangle AMC = 180^0 - 60^0 = 120^0$. Pošto je po uslovu zadatka $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{AC}$ te $\overline{AM} = \overline{AC}$, to je $\overline{MD} = \overline{AD} - \overline{AM} = \overline{AD} - \overline{AC} = \overline{AB}$.




Sada su trouglovi $\Delta ABC$ i $\Delta MDC$ podudarni jer je $\measuredangle CAB = \measuredangle CMD = 120^0$, $\overline{AM} = \overline{AC}$ i $\overline{BC} = \overline{CD}$ i $\measuredangle ACB = \measuredangle MCD$. Iz te podudarnosti slijedi da je $\overline{BC} = \overline{CD}$ i $\measuredangle ACB = \measuredangle MCD$. Tada je i $\measuredangle ACM = \measuredangle ACB + \measuredangle BCM = \measuredangle MCD + \measuredangle BCM = \measuredangle BCD = 60^0$. Kako je $\measuredangle BCD = 60^0$ i $\overline{BC} = \overline{CD}$, to je trougao $\Delta BCD$, jednakostraničan, q.e.d.

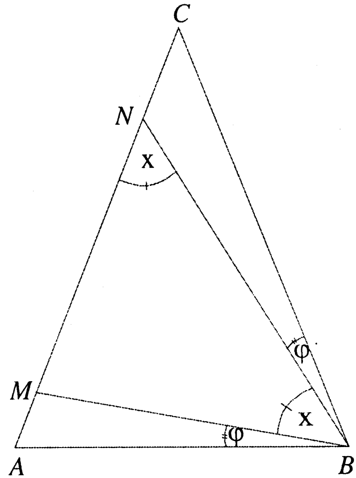
\# Kvadrat je podijeljen na devet jednakih manjih kvadrata. Je li moguće u ove male kvadrate upisati brojeve *1,2* i *3* tako da u svim kolonama, vrstama i dijagonalama sume brojeva budu različite? Odgovor obrazložiti!

Rj. Ukupan broj kolona, vrsta i dijagonala je $3+3+2=8$. Dakle, morali bismo formirati osam različitih suma tako da svaka ima tačno tri sabirka (neke od brojeva *1,2* ili *3*) i da te sume međusobno budu različite. Međutim, najmanja suma je $1+1+1=3$, a najveća $3+3+3=9$. Dakle, vrijednosti suma su iz skupa $A=\{3,4,\dots,9\}$. Pošto ovaj skup ima sedam elemenata, to ako ih razvrstamo u osam grupa, dvije grupe će imati iste sume. Odgovor je dakle negativan.

\# Dat je jednakokraki trougao $\Delta ABC$ ($\overline{AC}=\overline{BC}$). Na kraku $AC$ odabrane su dvije tačke $M$ i $N$ tako da je $\measuredangle ABM=\measuredangle CBN$ i $\overline{MN}=\overline{MB}$, pri čemu je tačka $M$ bliža tački $A$ nego tačka $N$. Koliki je ugao $\measuredangle ABN$ ?

Rj. Prema uslovu zadatka je $\measuredangle ABM=\measuredangle CBN=\varphi$. Kako je $\overline{MB}=\overline{MN}$, to je $\Delta BNM$ jednakokraki, pa su uglovi na osnovici $BN$ jednaki i iznose, npr. po $x$. Ugao $\measuredangle ANB$ je spoljašnji ugao $\Delta BNC$, pa je jednak zbiru dva nesusjedna unutrašnja ugla tog trougla. Odavdje slijedi da je $\measuredangle ACB=x-\varphi$. Kako je $\Delta ABC$ jednakokraki ($\overline{AC}=\overline{BC}$), to su uglovi na osnovici $AB$ jednaki, pa je $\measuredangle BAC=2\varphi+x$.

Sada je $2(2\varphi+x)+x-\varphi=180^0$, tj. $3\varphi+3x=180^0$, odnosno $\varphi+x=60^0$, tj. $\measuredangle ABN=\varphi+x=60^0$.



#

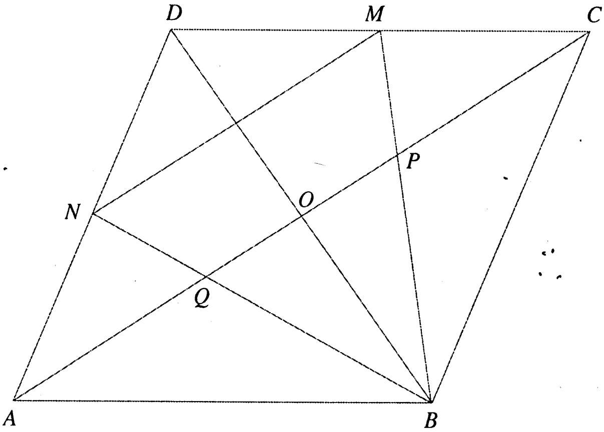
Dijagonala $AC$ romba $ABCD$ ima dužinu $6cm$. Neka je $M$ središte stranice $CD$ i $N$ središte stranice $AD$. Duži $BN$ i $BM$ sijeku dijagonalu $AC$ u tačkama $P$ i $Q$.

a) Izračunati dužinu odsječka $PQ$;

b) Izračunati površinu trougla $\Delta BMN$ ako je $\overline{BM} = 3cm$.

R.

a) Neka je dužina dijagonale $AC$ romba $ABCD$ jednaka $6cm$ i neka je druga dijagonala $BD$ siječe u tački $O$. Dijagonale romba se polove, pa su $BM$ i $CO$ težišne duži trougla $\Delta BCD$, a tačka $P$ je njegovo težište. Dakle, $\overline{CP} = 2\overline{PO}$. Analogno, posmatranjem trougla $\Delta ABD$ zaključujemo da je $\overline{AQ} = 2\overline{OQ}$. Na osnovu $\overline{CP} = 2 \cdot \overline{PO}$ i $\overline{AQ} = 2\overline{OQ}$, zaključujemo da je $\overline{AQ} = \overline{QP} = \overline{PC} = \frac{1}{3}\overline{AC} = 2cm$, tj. $\overline{PQ} = 2cm$.




b) Posmatrajmo $\Delta BDM$ i $\Delta BDN$. Stranica $BD$ je zajednička, dakle, $\overline{BD} = \overline{BD}$, $\overline{DM} = \overline{DN}$ i $\angle MDB = \angle NDB$ jer dijagonale romba su ujedno i simetrale unutrašnjih uglova romba. Dakle, $\Delta BDM \cong \Delta BDN$, pa je $\overline{BN} = \overline{BM} = 3cm$. Kako je duž $MN$ srednja linija trougla $\Delta ACD$, to je $\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AC} = 3cm$. Sada zaključujemo da je trougao $\Delta BMN$ jednakostraničan i njegova površina je

$$P = \frac{1}{4}\overline{MN}^2\sqrt{3}, \text{ tj. } \quad P = \frac{1}{4} \cdot 3^2\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{4}cm^2.$$